



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**  
**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A**  
**BIOMECHANIKY**

**FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING**  
**INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND**  
**BIOMECHANICS**

## **NAPJATOST V OKOLÍ VELMI OSTRÝCH BIMATERIÁLOVÝCH VRUB**

**STRESS DISTRIBUTION NEAR SHARP ORTHOTROPIC BI-MATERIAL NOTCH TIPS**

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**  
MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**  
AUTHOR

**Bc. ONDŘEJ KREPL**

**VEDOUCÍ PRÁCE**  
SUPERVISOR

**Ing. MIROSLAV HRSTKA**

BRNO 2013



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2012/2013

## **ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**

student(ka): Bc. Ondřej Krepl

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

editel ústavu Vám v souladu se zákonem 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### **Napjatost v okolí velmi ostrých bimateriálových vrubů**

v anglickém jazyce:

### **Stress distribution near sharp orthotropic bi-material notch tips**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vrub je běžnou součástí technických konstrukcí a také možným zdrojem problémů jejich provozu a užití, zejména v případě vrubů sestavených z více jak jednoho typu materiálu. Z hlediska rozložení napětí se vrub chová jako jeho koncentrátor způsobující nukleaci a následný růst trhlin ze svého konce. Cílem uchazeče bude vyjádřit zobecněné souinitelé intenzity napětí pomocí teorie psi-integrálu a metody konečných prvků s následným popisem rozložení napětí v blízkosti konce ostrého bimateriálového vrubu.

Cíle diplomové práce:

1. Aplikace teorie lomové mechaniky na konfiguraci ostrého vrubu a trhliny na rozhraní dvou ortotropních materiálů.
2. Analytický popis napětí v okolí ostrého bimateriálového vrubu.
3. Určení souinitelů intenzity napětí ostrého bimateriálového vrubu pomocí analytických metod v kombinaci s MKP.

Seznam odborné literatury:

Broberg, K. B., Cracks and Fracture, Academic Press, 1999.

Hrstka, M. Popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu pomocí zobecněného faktoru intenzity napětí, diplomová práce, 2012.

Svoboda, M. Problém trhliny v blízkosti bimateriálového rozhraní, diplomová práce, 2012.

Ševčík, O. Solution of general stress concentrators in anisotropic media by combination of FEM and the complex potential theory, disertační práce, 2009.

Vedoucí diplomové práce: Ing. Miroslav Hrstka

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 20.11.2012

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
editel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Dekan fakulty

## Abstrakt

Předkládaná diplomová práce se zabývá problematikou stanovení exponentů singularity napětí a zobecněných součinitelů intenzity napětí, pomocí kterých lze následně popsat napětové pole v okolí koncentrátoru napětí. Práci je možno rozdělit do tří hlavních částí. První část shrnuje základní poznatky o lineárních anizotropních materiálech, pojednává o základech lineární elastické lomové mechaniky a zavádí její zobecnění na případy obecných koncentrátorů napětí. Druhá část se zabývá speciální teorií rovinné anizotropní pružnosti – formalismem Lechnického-Eshelbyho-Stroha (LES). Dále je uvedena teorie  $\psi$ -integrálu, pomocí kterého je stanoven zobecněný součinitel intenzity napětí. Závěrečná část aplikuje teorii LES formalismu a  $\psi$ -integrálu na konkrétní materiálové konfigurace trhliny na bimateriálovém rozhraní, která je speciálním případem ostrého bimateriálového vrubu. Pomocí analyticko-numerického výpočtového algoritmu v softwaru ANSYS a Silverfrost FNT95 jsou následně určeny exponenty singularity napětí a zobecněné součinitele intenzity napětí.

## Abstract

Presented diploma thesis is concerned with problems of a stress singularity exponent and a generalized stress intensity factor determination, by dint the stress field in the vicinity of the stress concentrator can be consecutively determined. This task is possible to sectionalize into three parts. The first part summarizes basic information about linear anisotropic materials, deals with fundamentals of the linear elastic fracture mechanics and introduces its generalization to the case of the generalized stress intensity factors. The second part is dedicated to a special theory of anisotropic elasticity – Lekhnitskii-Eshelby-Stroh formalism (LES). Furthermore, a theory of the  $\psi$ -integral is introduced, by dint the stress intensity factor is determined. The final part applies the LES theory and the  $\psi$ -integral to the concrete material configuration of a crack on the bimaterial interface, a special example of a sharp bimaterial notch. By means of analytical-numerical algorithm in ANSYS and Silverforst FNT95 software the stress singularity exponents and generalised stress intensity factors are consecutively computed.

## Klíčová slova

Lineární elastická lomová mechanika, bimateriálový vrub, trhlina na bimateriálovém rozhraní, LES formalismus, zobecněný součinitel intenzity napětí, exponent singularity napětí,  $\psi$ -integrál

## Key words

Linear elastic fracture mechanics, bimaterial notch, bimaterial interface crack, LES formalism, generalized stress intensity factor, stress intensity exponent,  $\psi$ -integral



## **Bibliografická citace**

KREPL, O. Napjatost v okolí velmi ostrých bimateriálových vrubů. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 74 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Miroslav Hrstka.





## **Prohlášení**

Prohlašuji, že předložená diplomová práce je mojí původní prací, kterou jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 22. května 2013

.....

Bc. Ondřej Krepl



## **Poděkování**

Rád bych upřímně poděkoval vedoucímu své diplomové práce Ing. Miroslavu Hrstkovi, za cenné rady, čas a ochotnou pomoc po celou dobu vzniku této práce. Dále bych rád poděkoval doc. Ing. Tomáši Profantovi, Ph.D. za teoretické konzultace a cenný čas, který mi věnoval. Oběma vděčím za nespočet dovedností a znalostí, které mi předali.

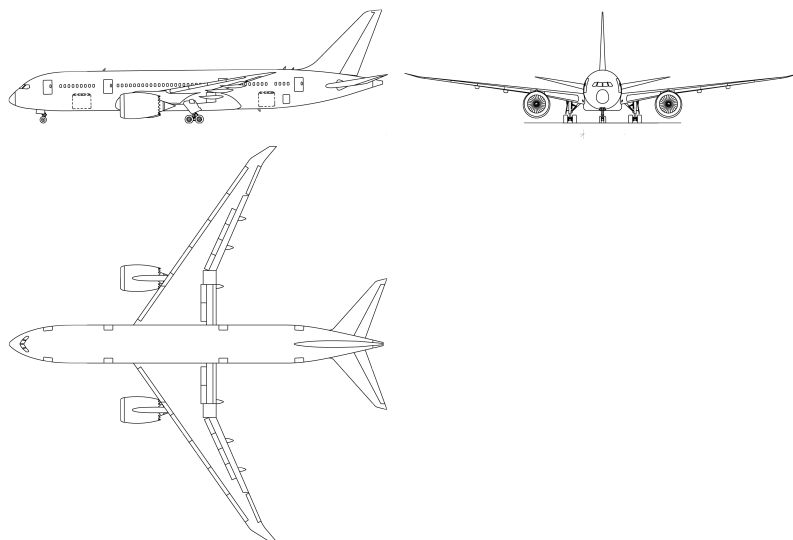


# Obsah

<b>1. Úvod</b>	<b>15</b>
<b>2. Popis problémové situace</b>	<b>18</b>
<b>3. Lineární anizotropní materiál</b>	<b>19</b>
3.1. Konstitutivní vztahy . . . . .	19
3.2. Vybrané typy materiálů . . . . .	21
3.3. Rovinné materiálové modely . . . . .	24
<b>4. Základní pojmy lineárně elastické lomové mechaniky</b>	<b>25</b>
4.1. Zóny v blízkosti kořene trhliny . . . . .	25
4.2. Módy zatěžování . . . . .	26
4.3. Součinitel intenzity napětí . . . . .	29
4.4. Podmína stability . . . . .	31
4.5. Obecný koncentrátor napětí . . . . .	31
<b>5. Lechnického-Eshelbyho-Strohův formalismus</b>	<b>34</b>
5.1. Obecné řešení . . . . .	34
5.2. Okrajové podmínky . . . . .	37
5.3. Vlastní čísla materiálů . . . . .	38
5.4. LES formalismus v případě ortotropního materiálu . . . . .	39
<b>6. <math>\Psi</math>-integrál</b>	<b>41</b>
<b>7. Výpočet vlastní hodnoty exponentu singularity</b>	<b>46</b>
7.1. Řešení na základě problému vlastních hodnot . . . . .	46
7.2. Určení vlastních hodnot exponentů singularity konkrétních materiálových konfigurací . . . . .	47
<b>8. Výpočet zobecněného součinitele intenzity napětí</b>	<b>49</b>
8.1. Určení pole napětí a posuvů pomocí MKP . . . . .	49
8.2. Určení ZSIN $H$ za pomoci $\psi$ -integrálu pro případ trhliny na rozhraní . . . .	53
8.2.1. Výpočet ZSIN . . . . .	53
8.2.2. Určení optimálního počtu prvků na integrační cestě . . . . .	54
8.2.3. Určení optimální integrační cesty . . . . .	54
8.2.4. Určení optimálního typu prvku . . . . .	56
8.3. Průběhy napětí . . . . .	57
<b>9. Závěr</b>	<b>59</b>
<b>10. Literatura</b>	<b>61</b>
<b>11. Seznam použitých symbolů</b>	<b>64</b>

<b>A. Definice a základní vlastnosti kartézských tenzorů</b>	<b>66</b>
A.1. Ortogonální transformace souřadnic . . . . .	66
A.2. Definice kartézských tenzorů . . . . .	67
<b>B. Airyho funkce napětí</b>	<b>68</b>
B.1. Odvození Airyho funkce napětí . . . . .	68
B.2. Muschelišviliho komplexní potenciály . . . . .	69
B.3. Westergaardovo řešení . . . . .	69
<b>C. Funkce komplexní proměnné</b>	<b>72</b>
C.1. Komplexní čísla . . . . .	72
C.2. Funkce komplexní proměnné . . . . .	73
C.3. Eulerův vzorec . . . . .	74

## 1. Úvod



Obrázek 1.1: Boeing 787 Dreamliner.

V dnešní době se stále více a více setkáváme se součástmi vyrobenými z kompozitních materiálů. Kompozitní materiály (kompozity) jsou složené materiály skládající se ze dvou a více složek, z nichž každá plní jinou specifickou funkci a má jiné materiálové charakteristiky, které jsou většinou značně odlišné [36]. Tyto materiály přináší výrobkům vlastnosti jako je vysoká pevnost, tuhost, nízká tepelná roztažnost či korozivzdornost v kombinaci s často velmi výraznou redukcí hmotnosti. Své využití nacházejí v mnoha odvětvích - od automobilového průmyslu, lodní výroby, sportovních výrobků až po produkty v ortopedii. Oblast, kde se kompozitní materiály ve velmi vysoké míře užívají, je letecký průmysl. Jako vhodný příklad můžeme uvést dopravní letadlo Boeing 787 Dreamliner, s pokrokovou konstrukcí snižující hmotnost letounu, viz obrázek 1.1. Celý trup a značná část křídel Dreamlineru jsou vyrobeny z kompozitu vyztuženého uhlíkovými vlákny, objemový podíl využití kompozitních materiálů je přibližně 80% [2, 3]. Jedna z variant Boeingu 787 je poháněna dvojicí motorů General Electric GEnx, obrázek 1.2. Je to dvouproudový motor, který jako první ve své třídě užívá lopatky dmyhadla vyrobené z vláken vyztuženého kompozitu, umožňující jejich snadnější výrobu a tvarování (oproti tradičnějšímu použití titanu). Dokonce i celé ústrojí GEnx je vyrobeno za účelem snížení hmotnosti a teplotní roztažnosti z kompozitu. Ve fázi vývoje jsou také keramické, vlákny vyztužené lopatky turbíny, které by motoru umožnily spalovat palivo při vyšších teplotách, za účelem vyšší účinnosti [9, 10]. Vidíme tedy, že kompozitní materiály umožňují součásti dosáhnout charakteristik, které by obtížně získala při použití tradičních konstrukčních materiálů. Na druhou stranu, určitou daní za výhodné vlastnosti kompozitních materiálů je jejich obtížný napětově - deformační popis. Konstrukčně používané vláknové kompozity totiž vykazují obecně anizotropní chování.

Při konstrukci součástí se v inženýrské praxi často setkáváme s geometrickými nespojitostmi jako jsou *vruby*, či spoje různých materiálů. Speciálním případem geometrické nespojitosti je vrub s nulovým úhlem rozevření - *trhlina*. Velikost a tvar těchto prvků, které souhrnně

nazýváme *koncentrátory napětí*, výrazně ovlivňují celkové mechanické vlastnosti součástí. V jejich blízkosti dochází ke koncentraci napětí a k iniciaci trhlin, které se za určitých podmínek mohou tělesem šířit, což může vyústit až v úplné rozlomení tělesa. Lom součástí je jev nežádoucí a nevratný. Historie bohužel dokazuje, že nehody způsobené selháním součástí zapříčiněné lomem mají mnohdy tragické následky.

Zřejmě nejznámějším příkladem negativních důsledků přítomnosti trhlin v konstrukčních součástech jsou nákladní lodě třídy Liberty. Tato plavidla byla vyráběna jako náhrada za lodě potopené ponorkami nacistického Německa. Měla posláním atlantickou cestou zásobovat Velkou Británii válečným materiálem a potravinami z USA během 2. světové války. Ve snaze o jejich co nejrychlejší vyhotovení se místo tradičně používané technologie výroby trupu za pomoci nýtovaných spojů přecházelo na spoje svařované, a to se všemi známými negativními důsledky (např. tepelně ovlivněná zóna). Ovšem ani použitý materiál trupu lodí nebyl vhodně zvolen. Užitá ocel vykazovala takzvané tranzitní lomové chování, tj. při plavbě chladnějšími vodami docházelo ke snížení její odolnosti proti křehkému lomu. Výsledkem bylo, že z 2 700 lodí postavených během druhé světové války přibližně 400 utrpělo poškození lomem, 90 z nich bylo poškozeno vážně. Některé z nich byly dokonce rozlomeny na dvě části [1].

Jako další vhodný příklad konstrukčních chyb, které vyústily v tragédii, je letoun deHavilland Comet. Toto na svou dobu technicky revoluční dopravní letadlo vzniklo na výkresech britských, původně vojenských konstruktérů. Jednalo se o první civilní letoun disponující proudovými motory a přetlakovou kabinou. Avšak nedlouho po uvedení do provozu dvě z letadel utrpěla při letu odlomení značné části trupu, což mělo za následek pád obou strojů. Bylo zahájeno rozsáhlé vyšetřování. Trup letounu byl testován v obrovské nádrži naplněné vodou, kde do trupu byla opakovaně přiváděna voda pod vyšším tlakem, což simulovalo podmínky opakované komprese a dekomprese. Vyšetřování odhalilo, že příčinou pádu obou strojů bylo odlomení značné části trupu způsobené únavovou trhlínou šířící se z oblasti koncentrace napětí v nedostatečně zaobleném rohu okénka. Tato havárie podtrhla důležitost zkoumání možnosti výskytu trhlin v leteckých konstrukcích [20]. Důsledkem pro firmu deHavilland byl její postupný krach. Zanedlouho hlavní podíl ve výrobě dopravních letadel převzala firma Boeing. Ani tomuto výrobcu dopravních letadel se nepovedlo předejít haváriím způsobeným trhlínami. Příkladem může být let Aloha Airlines 243 Boingu 737, kdy došlo k odtržení střešní části trupu letounu a jen zázrakem se podařilo pilotům přistát.

Havárie způsobené trhlínami se nevyhnuly ani jednomu z nejbezpečnějších způsobů dopravy, kdy poblíž městečka Eschede v Německu roku 1998 došlo k tragickému vykolejení vysokorychlostního vlaku ICE 883. Na vině stál lom kola vagónu způsobený nevhodnou koncepcí, dovolující nukleaci a propagaci únavové trhliny.

Našli bychom další nespočet příkladů, kdy za selháním stálo porušení součástí trhlínami. Výše uvedené ilustrují, že je nutné při návrhu součástí s koncentrátory napětí počítat. Ve snaze o pochopení příčin a zamezení opakování podobných katastrof se začala rozvíjet samostatná vědní disciplína *lomová mechanika*. I když za jejího zakladatele je považován A. A. Griffith, který se zabýval lomy křehkých materiálů, již v roce 1907 profesor Petrohradské univerzity G. V. Kolosov popsal napjatost v okolí eliptického otvoru. V tradiční teorii lomové mechaniky se jeho výsledky aplikují na trhlínu jako limitního případu eliptického otvoru. V roce 1920 Griffith publikoval práci obsahující kritérium šíření trhliny založené na energetické bilanci tělesa. Na Griffithovu práci navázal v polovině 20. století G. R. Irwin, který zobecnil zmíněné kritérium i na houževnaté materiály. Vypracoval na základě Westergarda

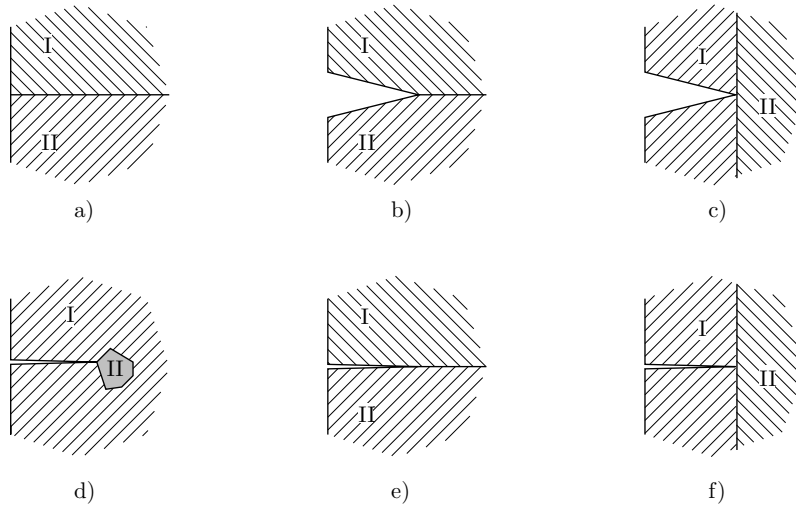


řešení novou, odlišnou koncepcí, umožňující určit napětí a posuvy v blízkosti trhliny za pomocí jediné konstanty  $K$ , známé jako *součinitel intenzity napětí* [1].  $K$ -koncepte je vhodná ovšem pouze pro případy, kdy lomu nepředchází výrazná plastická deformace. Jinými slovy předpokládáme, že plastická zóna před čelem trhliny je v porovnání s rozměry trhliny malá. Souhrnně nazýváme tuto část lomové mechaniky *lineárně elastická lomová mechanika*. Pro materiály vykazující výraznou plastickou deformaci před čelem trhliny byly vyvinuty odlišné nástroje umožňující popis chování trhliny: úhel rozevření COD, CTOD a J-integrál (J. Rice). Těm se věnuje *elasticko plastická lomová mechanika* [1, 34, 35].



Obrázek 1.2: Dvouproudový motor General Electric GEnx.

## 2. Popis problémové situace



Obrázek 2.1: Typické příklady geometrické a materiálové konfigurace obecného koncentrátoru napětí.

Jak bylo naznačeno v úvodní kapitole, moderní technologie vyžadují výrobu součástí s komplikovanou geometrií složenou z kombinace různých materiálů. Schopnost předpovědět vznik mezních stavů u těchto komponentů má zásadní význam při určování jejich bezpečnosti a životnosti. Přítomnost geometrických prvků složených z různých materiálů je doprovázena výskytem oblastí se zvýšenou koncentrací napětí. Mezi tyto prvky patří geometrické a materiálové nespojitosti jako je bimateriálové rozhraní na obrázku 2.1a, vrub na bimateriálovém rozhraní obr. 2.1b, vrub kolmý na bimateriálové rozhraní obr. 2.1c, trhlina na rozhraní materiálu a inkluze obr. 2.1d, trhlina na rozhraní bimateriálu obr. 2.1e, trhlina kolmá na bimateriálové rozhraní obr. 2.1f [14]. Souhrnně tyto nazýváme *obecné koncentrátory napětí*. Rozložení napětí v blízkosti obecného koncentrátoru napětí vykazuje singulární charakter, je úměrné vzdálenosti od kořene  $r$  umocněné na  $\delta - 1$  tedy

$$\sigma_{ij} \sim r^{\delta-1}, \quad r \rightarrow 0$$

kde  $\delta$  je obecně komplexní číslo, pro jehož reálnou část platí  $0 < \Re\{\delta\} < 1$ . Rozložení napětí v okolí čela obecného koncentrátoru je obecně odlišné od rozložení napětí v okolí čela trhliny v homogenním materiálu. Pro jeho přesnější popis je třeba základní parametr lineárně elastické lomové mechaniky součinitel intenzity napětí  $K$  zobecnit na *zobecněný součinitel intenzity napětí*  $H$ . Dále musíme určit tzv. *exponent singularity napětí*  $\delta - 1$ . Tento v případě trhliny v homogenním materiálu nabývá hodnoty  $-\frac{1}{2}$ .

Předkládaná práce si klade za cíl aplikovat teorii lineárně elastické lomové mechaniky na konfiguraci velmi ostrého vrubu a trhliny, na rozhraní dvou transversálně ortotropních materiálů. Dále za pomoci analyticko-numerických metod určit exponent singularity, a zobecněný součinitel intenzity napětí v okolí obecného koncentrátoru napětí.

### 3. Lineární anizotropní materiál

V této kapitole se budeme zabývat vztahy mezi napětími a deformacemi *lineárního anizotropního elastického materiálu*, který je nejobecnějším materiálovým modelem. K jeho popsání je potřeba 21 nezávislých materiálových konstant. Jestliže se omezíme na lineárně pružný materiálový model, konstitutivní vztahy jsou potom lineární a mají tvar Hookeova zákona [36].

#### 3.1. Konstitutivní vztahy

Napjatost v bodě tělesa je plně popsána tenzorem napětí  $\sigma_{ij}$ , deformace v témže bodě tělesa je popsána tenzorem přetvoření  $\varepsilon_{ij}$  [13]. Definici a vlastnostem tenzorů je věnován dodatek A. Elastický materiál disponuje jednoznačným vztahem mezi napětími a přetvořeními. Existuje-li mezi napětími a přetvořeními pružného materiálu lineární závislost, tuto závislost nazýváme zobecněným Hookeovým zákonem [4, 12] a zapisujeme ji jako

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

kde  $C_{ijkl}$  je tenzor čtvrtého řádu, jehož prvky jsou *elastické koeficienty*. Při zápisu (3.1) jsme použili *Einsteinovo sumační pravidlo*, viz dodatek A.1. Tento tenzor splňuje podmínky úplné symetrie,

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}, \quad C_{ijkl} = C_{klij}, \quad (3.2)$$

odvození je možno nalézt např. v [12, 33]. Díky zmíněným symetrickým vlastnostem, se počet nezávislých elastických koeficientů uvažovaného materiálu redukuje z 81 na 21. K formálnímu zjednodušení zavádíme tzv. *zkrácenou notaci* prvků tenzoru napětí a přetvoření

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1 & \sigma_{22} &= \sigma_2 & \sigma_{33} &= \sigma_3, \\ \sigma_{23} &= \sigma_4 & \sigma_{31} &= \sigma_5 & \sigma_{12} &= \sigma_6. \end{aligned} \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3, \\ \varepsilon_{23} &= \varepsilon_4 & \varepsilon_{31} &= \varepsilon_5 & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_6. \end{aligned} \quad (3.3b)$$

Pro elastické koeficienty také zavádíme zkrácenou notaci následujícím způsobem

$$C_{ijkl} = C_{\alpha\beta}, \quad (3.4)$$

$$\alpha = \begin{cases} i, & \text{pro } i = j, \\ 9 - i - j & \text{pro } i \neq j, \end{cases} \quad (3.5a)$$

$$\beta = \begin{cases} k & \text{pro } k = l, \\ 9 - k - l & \text{pro } k \neq l. \end{cases} \quad (3.5b)$$

Hookeův zákon (3.1) pak můžeme vyjádřit v zúženém tvaru [36], tj.

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta}\varepsilon_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (3.6)$$

v maticovém tvaru pak dostaneme následující

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

kde byla z důvodu jasného fyzikálního významu zavedena smyková napětí a úhlová přetvoření, a to následujícím přiřazením [36]:

$$\begin{aligned} \tau_{23} &= \sigma_4, & \tau_{31} &= \sigma_5, & \tau_{12} &= \sigma_6, \\ \gamma_{23} &= \varepsilon_4, & \gamma_{31} &= \varepsilon_5, & \gamma_{12} &= \varepsilon_6, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Indexy odpovídají směrům v kartézském souřadném systému znázorněném na obrázku 3.1a. Protože platí  $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ , stačí psát matici pouze prvky nad hlavní diagonálou

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Tuto matici navýváme *maticí tuhosti* a značíme symbolem  $\mathbb{C}$ . Často také pracujeme s Hookeovým zákonem v inverzním tvaru

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (3.10)$$

kde  $S_{ijkl}$  je tenzor čtvrtého řádu, jehož prvky jsou *elastické moduly*. Tyto splňují podmínky symetrie analogicky rovnici (3.2) [12, 33], tj.

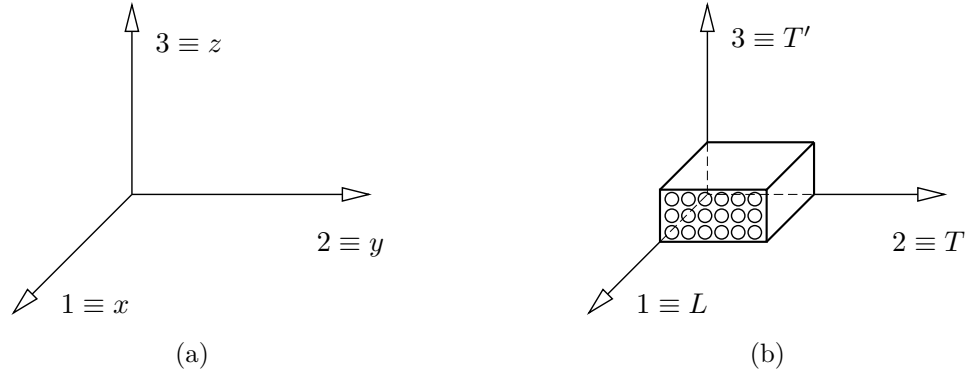
$$S_{ijkl} = S_{jikl}, \quad S_{ijkl} = S_{ijlk}, \quad S_{ijkl} = S_{klij}.$$

Pomocí vztahů (3.5a) a (3.5b) zavádíme pro elastické moduly zkrácenou indexovou notaci, tj.

$$\begin{aligned} S_{ijkl} &= S_{\alpha\beta}, & \text{pro } \alpha & \text{ a zároveň } \beta \leq 3, \\ 2S_{ijkl} &= S_{\alpha\beta}, & \text{pro } \alpha & \text{ nebo } \beta \leq 3, \\ 4S_{ijkl} &= S_{\alpha\beta}, & \text{pro } \alpha & \text{ a zároveň } \beta > 3. \end{aligned}$$

Ve zúženém tvaru píšeme inverzní Hookeův zákon

$$\varepsilon_\alpha = S_{\alpha\beta} \sigma_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.11)$$



Obrázek 3.1: a) Kartézský souřadný systém, b) Souřadný systém s vyznačenými hlavními materiálovými směry pro ortotropní materiál.

V maticovém tvaru má inverzní Hookeův zákon tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Ve vztahu vystupující matici, která obsahuje elastické moduly, nazýváme *maticí poddajnosti* a značíme symbolem  $\mathbb{S}$ . Vztah pro měrnou energii napjatosti  $W$  pomocí maticové symboliky píšeme, [33]

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbb{S} \boldsymbol{\sigma}.$$

Aby byla měrná energie napjatosti  $W$  kladná, musí platit

$$\boldsymbol{\varepsilon} \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}^T > 0 \quad (3.13)$$

nebo obdobně

$$\boldsymbol{\sigma}^T \mathbb{S} \boldsymbol{\sigma} > 0. \quad (3.14)$$

Z rovnic (3.13) a (3.14) plyne, že matice tuhosti  $\mathbb{C}$  a matice poddajnosti  $\mathbb{S}$  jsou pozitivně definitní<sup>1</sup>.

### 3.2. Vybrané typy materiálů

V následujícím odstavci je uveden výčet významných typů materiálů z hlediska materiálové struktury. Vykazuje-li materiálový model symetrické vlastnosti, dochází k redukci počtu

<sup>1</sup>Pozitivně definitní matice  $\mathbb{M}$  je taková matice, pro kterou platí  $\mathbf{x} \neq 0 \implies \mathbf{x}^T \mathbb{M} \mathbf{x} > 0$ , kde  $\mathbb{M}$  je čtvercová matice,  $\mathbf{x}$  je libovolný vektor a  $\mathbf{x}, \mathbb{M} \in \mathbb{R}$ , [26].

nezávislých materiálových konstant [12], jak bude také ukázáno níže. Materiálové charakteristiky budeme uvádět ve formě matic tuhosti  $\mathbb{S}$ , které v případě ortotropního a transversálně ortotropního materiálu poskytují výhodnější popis materiálových charakteristik nežli matice  $\mathbb{C}$ .

### Obecný anizotropní materiál

Jedná se o nejobecnější materiálový model. Rovina symetrie materiálových vlastností zde neexistuje. Matici poddajnosti píšeme ve tvaru

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}.$$

Tento materiálový model je popsán celkem 21 nezávislými materiálovými konstantami.

### Obecný ortotropní materiál

U tohoto materiálového modelu existují tři hlavní ortotropní osy 1, 2, 3, které jsou vzájemně ortogonální. Roviny kolmé na tyto ortotropní osy tvoří roviny symetrie materiálových vlastností. Protože obecný ortotropní materiál představuje vhodný materiálový model např. pro vrstvený kompozitní materiál s vlákny, značíme tyto materiálové osy také,  $L$ ,  $T$ ,  $T'$  jak je patrné z obrázku 3.1b. Směr značený indexem  $L$  nazýváme *longitudinální* (po směru vláken) a směry značené  $T$ ,  $T'$  *transverzální* (kolmé na vlákna). S uvažováním symetrie obdržíme matici poddajnosti ve tvaru

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}.$$

Tato matice obsahuje celkem 9 nezávislých materiálových konstant. Jednotlivé prvky matice poddajnosti je možné rovněž stanovit pomocí inženýrských (nebo také fyzikálních) charakteristik [12]. Tedy Poissonova čísla  $\nu_{\alpha\beta}$ , Youngova modulu pružnosti v tahu  $E_\alpha$  a modulu pružnosti ve smyku  $G_{\alpha\beta}$ . Jestliže indexy 1, 2, 3 označují jednotlivé ortotropní směry, viz obr. 3.1b, pro matici  $\mathbb{S}$  pak platí

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}.$$

Z podmínky symetrie vzhledem k hlavní diagonále matice pro moduly pružnosti a Poissonova čísla musí platit

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}.$$

### Transverzálně ortotropní materiál

U transversálně ortotropního nebo též příčně izotropního materiálu existuje jedna hlavní ortotropní rovina, ve které jsou ve všech směrech mechanické vlastnosti stejné. Na obrázku 3.1b je to rovina 2,3 resp.  $T, T'$ . Za pomoci tohoto materiálového modelu popisujeme chování dlouhovláknového kompozitu s dostatečně hustou sítí vláken [36]. Matici poddajnosti transversálně ortotropního materiálu píšeme ve tvaru

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & S_{66} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}.$$

Výše uvedená matice obsahuje 5 nezávislých materiálových konstant. Vztah pro  $S_{44}$  vyplývá ze závislosti<sup>2</sup> mezi modulem pružnosti v tahu  $E_2$ , modulem pružnosti ve smyku  $G_{23}$  a Poissonovým číslem  $\nu_{23}$ . Prvky matice  $\mathbb{S}$  je možno zapsat také pomocí inženýrských konstant

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

### Izotropní materiál

Zvyšujeme-li dále materiálovou symetrii, dostaneme se až k izotropnímu materiálu. Jedná se o degenerovaný případ anizotropního materiálu, který vykazuje symetrii ve všech směrech, nezávisle na natočení souřadného systému. Počet nezávislých parametrů klesá na 2 a matici elastických modulů můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ & & & & & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

<sup>2</sup>Výraz pro  $S_{44}$  vychází ze vztahu mezi Youngovým modulem, modulem pružnosti ve smyku a Poissonova čísla pro izotropní materiál  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ , viz Lamého konstanty (3.19).

Za pomoci inženýrských konstant Youngova modulu  $E$  a Poissonova čísla  $\nu$  dostáváme

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Na závěr tohoto odstavce doplňme, že izotropní materiál můžeme popsat také pomocí tzv. *Lamého konstant*  $\mu$ ,  $\lambda$ . Matici poddajnosti  $\mathbb{C}$  potom píšeme

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

kde

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.19)$$

Druhou Lamého konstantu  $\mu$  nazýváme v inženýrské praxi modul pružnosti ve smyku a označujeme symbolem  $G$ . Tímto způsobem bude dále značena v této práci.

### 3.3. Rovinné materiálové modely

Řadu úloh pružnosti a pevnosti lze formulovat jako úlohy rovinné využívající rovinný anizotropní materiál, používaný např. jako výpočtový model tenké vrstvy kompozitu – laminy. Pro případ rovinné napjatosti anizotropního materiálu  $\sigma_3 = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$  obdržíme inverzní Hookeův zákon (3.12) ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{26} \\ & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že výše zmíněná matice obsahuje 6 nezávislých prvků. V případě rovinného ortotropního materiálu má matice poddajnosti tento tvar

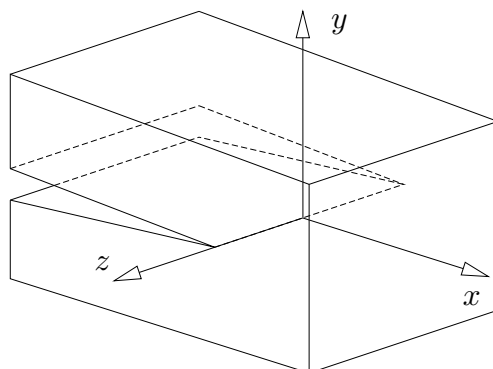
$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ & S_{22} & 0 \\ & & S_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

kde jednotlivé prvky lze vyjádřit pomocí inženýrských konstant podobně jako v (3.15). Uvažujeme-li případ rovinné deformace, bude se matice poddajnosti rovinného anizotropního materiálu skládat z redukovaných elastických modulů  $s_{\alpha\beta}$  [12, 33], které dostaneme přepočítáním elastických modulů  $S_{\alpha\beta}$  pomocí vztahu

$$s_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{S_{\alpha 3} S_{\beta 3}}{S_{33}} = s_{\beta\alpha}. \quad (3.21)$$



## 4. Základní pojmy lineárně elastické lomové mechaniky



Obrázek 4.1: Systém souřadnic na čele trhliny.

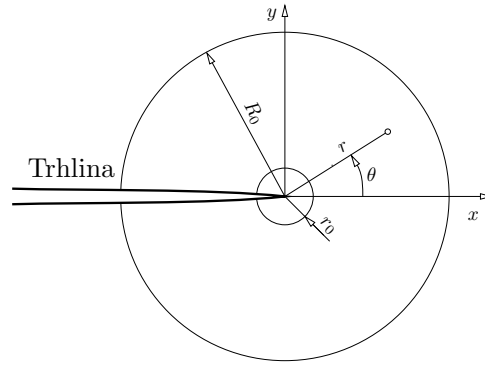
Širokou škálu problémů lomové mechaniky lze řešit metodami lineárně elastické lomové mechaniky. Její platnost je omezena splněním předpokladů o velikosti *plastické zóny* v blízkosti čela trhliny. Ta musí být dostatečně malá ve srovnání s rozměry trhliny. Omezení velikosti plastické zóny umožňuje se vyhnout komplikovanému popisu lomových procesů v *procesní zóně* a využít možnosti aplikace principů mechaniky kontinua na nejbližší okolí čela trhliny. Bližší informace o mechanismu a popisu procesů lomu v procesní zóně trhliny lze nalézt v [5].

### 4.1. Zóny v blízkosti kořene trhliny

V nejtěsnější blízkosti čela trhliny se nachází procesní zóna, jak ilustruje obrázek 4.2. Je to oblast, která je vystavena velmi vysokým zatížením. Dochází zde k tzv. *dekohezi*, tedy porušování soudržnosti materiálu [32]. Proto ve zmíněné oblasti nemůžeme uplatnit konstitutivní vztahy, tak jako ve zbylých částech tělesa. Dekoheze probíhá na mikroúrovni rozdílnými způsoby pro různé materiály. Má obecně dvě fáze. První fází je tvorba mikroskopických poruch materiálu. Například u kovů je to vznik a růst mikro-trhlin (za snížených teplot) nebo vznik a rozšiřování dutin (za teplot pokojových). Druhou fází je propojení mikroskopických poruch s primární trhlinou [5]. Pokud je velikost procesní zóny malá ve srovnání s rozměrem oblasti tzv. *K-dominance* (okolí čela trhliny, kde je pole napětí charakterizováno dostatečně přesně singulárním členem asymptotického rozvoje (4.2), viz obr. 4.4), pak dosažení kritického stavu



Obrázek 4.2: Schematické znázornění procesní zóny a plastické oblasti.



Obrázek 4.3: Velikost poloměru disipačních zón je zde označena  $r_0$ , oblast  $K$ -dominance  $R_0$ .

procesní zóny jednoznačně souvisí s dosažením kritické hodnoty součinitele intenzity napětí, *lomové houževnatosti*  $K_C$  [16].

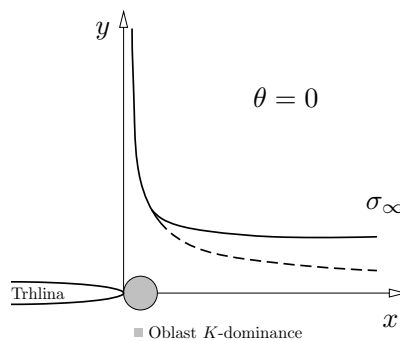
Plastická oblast je taková oblast v blízkosti kořene trhliny (obr. 4.2), ve které je natolik zvýšené napětí, že elasto-plastický materiál jej není schopen přenést bez toho, aniž by se plasticky nedeformoval. Dochází zde k tzv. relaxaci napětí – u kovů na hodnotu meze kluzu materiálu. Procesní zónu a plastickou oblast označujeme souhrnně jako disipační zóny [5], které jsou schématicky znázorněny na obrázku 4.3. Problematika procesní a plastických zón v blízkosti kořene trhliny je značně komplikovaná a výše uvedený popis má poskytnout pouze základní představu o jejich vlastnostech. Detailní popis lze nalézt např. v [5].

## 4.2. Módy zatěžování

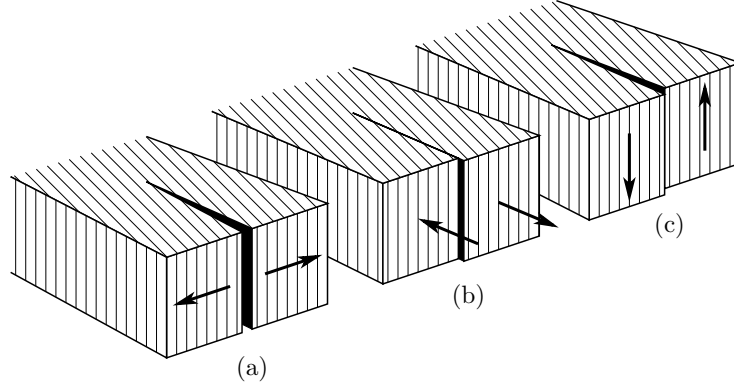
Trhlina uvnitř tělesa je tvořena dvěma volnými povrchy, které se spojují a vytvářejí čelo trhliny. Jestliže je těleso vystaveno zatížení, tyto dva zmíněné povrchy se vůči sobě pohybují. Jejich pohyb může být vyjádřen pomocí složek posuvu

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^T$$

v příslušných osách  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , jak ukazuje obrázek 4.1. Každé z uvedených složek posuvu odpovídá jeden ze tří *módů zatěžování*. Každý proces zatěžování trhlín je možno chápat jako



Obrázek 4.4: Oblast  $K$ -dominance, čárkovaně je označen pokračující průběh singulárního členu asymptotického rozvoje  $\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ . Symbolem  $\sigma_\infty$  značíme vnější zatížení.



Obrázek 4.5: Jednotlivé módy zatěžování.

superpozici těchto tří nezávislých módů [1, 5, 28]:

- Rozevírací mód, obrázek 4.5a. Tento mód označujeme jako mód I.
- Smykový mód, obrázek 4.5b. Tento mód označujeme jako mód II.
- Střihový mód, obrázek 4.5c. Tento mód označujeme jako mód III.

Problémy módu I a módu II lze řešit jako úlohu rovinné deformace (dále jen RD) případně rovinné napjatosti (dále jen RN). U módu III se jedná narozdíl od dvou předchozích o anti-rovinný problém. Pro složky vektoru posuvů  $\mathbf{u}$  při jednotlivých módech zatížení platí:

- Mód I: horizontální posuvy jsou vzhledem k ose  $x$  symetrické, vertikální posuvy jsou anti-symetrické

$$\begin{aligned} u(x, -y, z) &= u(x, y, z) & v(x, -y, z) &= -v(x, y, z), \\ w &= 0 \quad \text{pro RD} & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{pro RN.}, \end{aligned} \quad (4.1a)$$

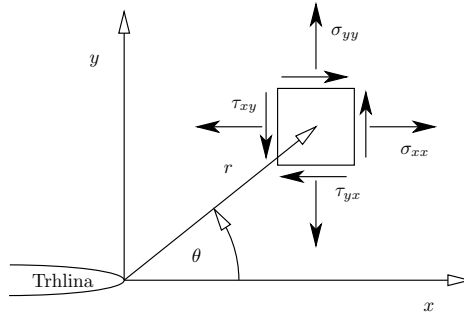
- Mód II: horizontální posuvy jsou vzhledem k ose  $x$  anti-symetrické, vertikální posuvy jsou symetrické

$$\begin{aligned} u(x, -y, z) &= -u(x, y, z), & v(x, -y, z) &= v(x, y, z), \\ w &= 0 \quad \text{pro RD}, & \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= 0 \quad \text{pro RN.}, \end{aligned} \quad (4.1b)$$

- Mód III: jedinou nenulovou složkou posuvu je  $w$  a ta je anti-symetrická vzhledem k ose  $x$

$$u = v = 0, \quad w(x, -y, z) = -w(x, y, z), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.1c)$$

Jsou-li postupně pro jednotlivé módy splněny podmínky (4.1a), (4.1b) a (4.1c), pak v případě izotropního materiálu mezi složkami tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$  platí následující rovnice:



Obrázek 4.6: Kartézský souřadný systém umístěný do kořene trhliny.

- Mód I: normální napětí jsou symetrická, smyková napětí anti-symetrická vzhledem k ose  $x$

$$\sigma_{xx}(x, -y, z) = \sigma_{xx}(x, y, z), \quad \sigma_{yy}(x, -y, z) = \sigma_{yy}(x, y, z),$$

$$\sigma_{zz}(x, -y, z) = \sigma_{zz}(x, y, z), \quad \tau_{xy}(x, -y, z) = -\tau_{xy}(x, y, z),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

- Mód II: normální napětí jsou anti-symetrická, smyková napětí symetrická vzhledem k ose  $x$

$$\sigma_{xx}(x, -y, z) = -\sigma_{xx}(x, y, z), \quad \sigma_{yy}(x, -y, z) = -\sigma_{yy}(x, y, z),$$

$$\sigma_{zz}(x, -y, z) = -\sigma_{zz}(x, y, z), \quad \tau_{xy}(x, -y, z) = \tau_{xy}(x, y, z),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

- Mód III: jediné nenulové složky tenzoru napětí tvoří anti-symetrická  $\tau_{xz}$  a symetrická  $\tau_{yz}$  opět vzhledem k ose  $x$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0,$$

$$\tau_{xz}(x, -y, z) = -\tau_{xz}(x, y, z), \quad \tau_{yz}(x, -y, z) = \tau_{yz}(x, y, z),$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0.$$

### 4.3. Součinitel intenzity napětí

Uvažujme těleso z homogenního izotropního materiálu. Podle Williamse [37] je napětové pole v tělese s trhlinou popsáno vztahem

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta), \quad (4.2)$$

kde  $\sigma_{ij}$  jsou složky tenzoru napětí,  $r$  a  $\theta$  jsou polární souřadnice znázorněné na obr. 4.6, parametr  $k$  je konstantní,  $A_m$  jsou koeficienty členů vyšších řádů. Funkce  $f_{ij}$  a  $g_{ij}^{(m)}(\theta)$  jsou bezrozměrné funkce úhlu  $\theta$ . Řešení pro libovolnou konfiguraci obasahuje singulární člen  $\frac{k}{\sqrt{r}}$ . Představme si nyní, že se přibližujeme ke kořeni trhliny, tedy  $r \rightarrow 0$ . První, singulární člen rozvoje, roste nade všechny meze, členy pro které platí  $m > 0$  se blíží k nule, ale člen  $m = 0$  pro  $i = j = 1$  zůstává konečný [1]. Tento konečný člen vystupuje v tzv. *dvouparametrové lomové mechanice* jako *T-napětí*, popisující vliv tzv. *constraintu*. My se v dalším budeme zabývat pouze jednoparametrovou lomovou mechanikou, podrobnosti o T-napětí je možno nalézt v [1, 34].

Každý ze zmíněných módů zatěžování I, II, III vytváří v blízkosti čela trhliny napětovou singularitu typu  $r^{-\frac{1}{2}}$ , kde  $r$  je vzdálenost od kořene trhliny. Při přibližování se ke kořeni trhliny napětí teoreticky roste nade všechny meze, avšak v reálném materiálu vznikají v okolí kořene trhliny při jejím růstu vždy plastické deformace, takže skutečné složky napětí jsou konečně velké [35]. Jejich určení však není jednoduché. Byla proto hledána jiná veličina související s polem napjatosti v elastickém materiálu, která by však byla v kořeni trhliny ohraničená a mohla tak sloužit jako základní parametr podmínky stability [35]. Jako vhodné se ukázalo řešení Westergaarda, který využil Airyho funkce pro získání vztahů napjatosti a přetvoření u základních typů zatěžování trhliny. Podrobnosti jsou uvedeny v dodatku B.3. Uvažujme blízké okolí čela trhliny, kde je napětové pole popsáno za pomoci prvního singulárního členu Williamsova rozvoje. Složky napětí  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  jsou znázorněny na obrázku 4.6. Pro složky tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$  a pro složky vektoru posuvů  $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$  u jednotlivých módů zatížení platí:

- Múd I

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \text{pro RD}, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \text{pro RN}.$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \\ v &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \end{aligned}$$

kde  $K_I$  je součinitel intenzity napětí pro mód I. V souladu s (4.3) v rovině trhliny, kde  $\theta = 0$  jsou si složky napětí  $\sigma_{xx}$  a  $\sigma_{yy}$  navzájem rovny a vypočítáme je pomocí vztahu

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (4.4)$$

• Mód II:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \text{pro RD}, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \text{pro RN}.$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \\ v &= -\frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned}$$

• Mód III:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}, \\ w &= \frac{K_{III}}{\sqrt{G}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

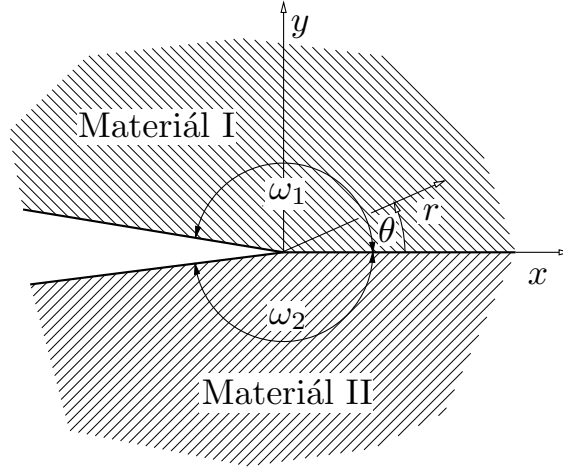
Součinitel intenzity napětí, obecně zapsaný  $K_J$ ,  $J = \text{I, II, III}$ , kde index  $J$  udává mód zatížení, je definován [1, 5, 34]:

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r, 0) \right], \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0) \right], \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(r, 0) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

V obecném tvaru pro kombinované zatížení můžeme vztahy pro složky napětí a posuvů vyjádřit

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta), \\ u_i &= \frac{K_I}{(1-k^2)G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \delta_{2i} + \frac{K_{II}}{(1-k^2)G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \delta_{1i} + \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \delta_{3i}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

kde  $f_{ij}^J$  je funkce, která závisí pouze na souřadnici  $\theta$  a uvažovaném módu zatěžování. Symbol  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta (B.3). Konstanta  $k$  je daná vztahem (B.9), uvedeným v dodatku B.



Obrázek 4.7: Bimateriálový vrub složený z materiálů I,II a charakterizovaný úhly  $\omega_1$  a  $\omega_2$ .

#### 4.4. Podmína stability

Základním principem lineární elastické lomové mechaniky pro posouzení růstu trhliny je předpoklad, že růst trhliny nastává, jestliže součinitel intenzity napětí dosáhne kritické hodnoty. Toto kritérium je možno pro mód I zapsat, [28]

$$K_I = K_{IC}, \quad (4.9)$$

kde  $K_I$  je součinitel intenzity napětí, který charakterizuje intenzitu singularity a je závislý na velikosti zatížení a geometrii tělesa s trhlinou. Veličina  $K_{IC}$  je materiálovou charakteristikou nazývanou *lomová houževnatost*. Na základě znalosti  $K_{IC}$  je možno určit maximální možné zatížení  $\sigma_C = \sigma_C(K_{IC})$ . Trhlina se nebude tělesem šířit, jestliže pro provozní zatížení  $\sigma$  platí  $\sigma < \sigma_C$  [14].

#### 4.5. Obecný koncentrátor napětí

*Obecný koncentrátor napětí* je takový prvek tělesa, v jehož blízkém okolí dochází ke koncentraci napětí. Různé geometrické a materiálové konfigurace obecného koncentrátoru napětí byly diskutovány v kapitole 2. V této práci se dále budeme zabývat specifickým případem obecného koncentrátoru a to vrubem na rozhraní dvou různých materiálů, který je znázorněn na obrázku 4.7. Pole napětí v blízkosti obecného koncentrátoru napětí vykazuje singulární charakter [11, 24, 31] a popisujeme jej pomocí vztahu pro první člen Williamsova asymptotického rozvoje, který je rozepsán do tvaru

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{k=1}^n H_k r^{\delta_k - 1} f_{ijk}(\theta). \quad (4.10)$$

Symbolem  $H_k$  značíme *zobecněný součinitel intenzity napětí*,  $r$  vzdálenost od bodu singularity a  $\delta_k$  jako *charakteristickou (vlastní) hodnotu exponentu singularity*  $\delta_k - 1$ . Funkce  $f_{ijk}(\theta)$  je funkcí závislou na úhlu  $\theta$ . Platí  $H_k, \delta_k \in \mathbb{C}$ . V případě vrubu i v případě trhliny na

bimateriálovém rozhraní<sup>3</sup> je  $n = 2$ . Vektor posuvů můžeme vyjádřit za pomoci vztahu

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \sum_{k=1}^n H_k r^{\delta_k} \boldsymbol{\eta}_k(\theta), \quad (4.11)$$

kde funkce  $\boldsymbol{\eta}_k(\theta)$  závisí na úhlu  $\theta$ , geometrii obecného koncentrátoru a použitém materiálu [14]. způsob jejich určení je uveden v kapitole 6.2. V případě vrubu na bimateriálovém rozhraní existují dva různé reálné  $H_1, H_2$  a odpovídající dva různé reálné  $\delta_1$  a  $\delta_2$ . Se snižujícím se úhlem rozevření vrubu se vyskytne mezní úhel charakterizovaný tzv. bifurkačním bodem, ve kterém se původně dvě různé reálné  $\delta_k$  stanou komplexně sdruženými. Tento jev můžeme pro danou bimateriálovou konfiguraci pozorovat na obrázku 4.8. Pro případ trhliny na bimateriálovém rozhraní dostáváme komplexně sdružené  $H, \bar{H}$  a komplexně sdružené  $\delta$  a  $\bar{\delta}$  [12] Vztahy pro složky napětí (4.10) je možné přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_{xi}(r, \theta) &= H r^{\delta-1} \boldsymbol{\lambda}_{,y}(\theta) - \bar{H} r^{\bar{\delta}-1} \overline{\boldsymbol{\lambda}_{,y}}(\theta), \\ \sigma_{yi}(r, \theta) &= H r^{\delta-1} \boldsymbol{\lambda}_{,x}(\theta) + \bar{H} r^{\bar{\delta}-1} \overline{\boldsymbol{\lambda}_{,x}}(\theta). \end{aligned} \quad (4.12)$$

kde  $\boldsymbol{\lambda}(\theta)$  je úhlová funkce, jejíž výpočet bude uveden v kapitole 6.2. Čárka v indexu značí derivaci podle dané souřadnice, pruh nad symbolem komplexní sdruženost. Obdobně je možné formulovat vztah pro vektor napětí (4.11)

$$\mathbf{u}(r, \theta) = H r^{\delta} \boldsymbol{\eta}(\theta) + \bar{H} r^{\bar{\delta}} \bar{\boldsymbol{\eta}}(\theta), \quad (4.13)$$

Vlastní hodnotu exponentu singularity můžeme zapsat

$$\delta_k = \delta_R \pm i\varepsilon.$$

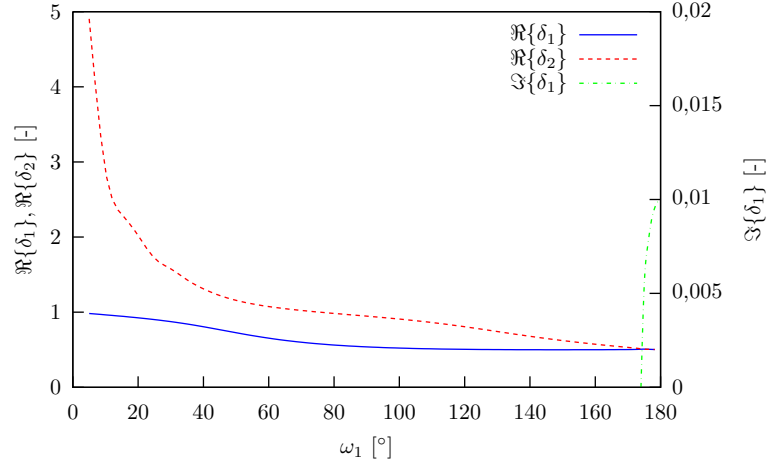
Jeho reálná část nabývá hodnot  $\delta_R \in (0, 1)$  a  $\varepsilon$  nazýváme *oscilační index*, bezrozměrné reálné číslo značící míru elastické odlišnosti dvou různých materiálů [29]. Ve speciálním případě trhliny v homogenním materiálu je charakteristická hodnota exponentu singularity  $\delta = \frac{1}{2}$ , jak je patrné ve vztazích (4.3), (4.5), (4.6). Uvažujeme-li trhlínu na bimateriálovém rozhraní, pak

$$\delta = \frac{1}{2} \pm i\varepsilon. \quad (4.14)$$

---

<sup>3</sup>Případ trhliny na bimateriálovém rozhraní je speciálním případem vrubu na bimateriálovém rozhraní s nulovým úhlem rozevření.





Obrázek 4.8: Průběh reálné a imaginární složky vlastních hodnot exponentů singularity  $\delta_1$  a  $\delta_2$  v závislosti na úhlu rozevření  $\omega_1$  pro bimateriálovou konfiguraci transversálně ortotropních materiálů s moduly pružnosti  $E_{x1} = 50\text{GPa}$ ,  $E_{y1} = 100\text{GPa}$ ,  $E_{x2} = 400\text{GPa}$ ,  $E_{y2} = 100\text{GPa}$ .

### Podmínka stability trhliny v tělese s obecným koncentrátorem napětí

Pro těleso s obecným koncentrátorem napětí je možno podmínku stability šíření trhliny (4.9) zobecnit do tvaru

$$H_k = H_{kC},$$

kde  $H_{kC}$  je obdobou kritického materiálového parametru  $K_{IC}$ . Potom analogicky jako v předchozím případě pro maximální zatížení platí  $\sigma_C = \sigma_C(H_{kC})$  a trhlina se tělesem nebude šířit jestliže provozní zatížení  $\sigma < \sigma_C$  [14]. Více o stanovení podmínek porušení bimateriálových vrubů lze nalézt v [15].

## 5. Lechnického-Eshelbyho-Strohův formalismus

V druhé polovině minulého století byla zformulována teorie rovinné anizotropní pružnosti, která byla vystavěna na vlastnostech funkcí komplexní proměnné. Podle jmen svých tvůrců Lechnického (1950), Eshelbyho, Read a Shockleyho (1953) a Stroha (1958) je tato teorie známá jako tzv. *Lechnického-Eshelbyho-Strohův formalismus* (dále jen LES formalismus). LES formalismus umožňuje plně popsat anizotropní materiál za pomoci pouze šesti *charakteristických (vlastních) čísel materiálu*. Původní Lechnického formalismus předpokládá závislosti složek napětí pouze na souřadnicích  $x$  a  $y$  a popisu materiálu pomocí matice poddajnosti, kdežto Strohův formalismus je odvozen za předpokladu závislosti posuvů na souřadnicích  $x$  a  $y$  a popisu materiálu maticí tuhosti. Ačkoli Lechnického formalismus je nástrojem k řešení obecnějších problémů (např. tah a krut anizotropního prutu, více v [12, 11, 33]), Strohův formalismus je matematicky elegantnějším nástrojem při řešení dvojdimenzionálních úloh anizotropní pružnosti [12, 33].

### 5.1. Obecné řešení

Rovnice rovnováhy bez uvažování objemových sil má tvar, [5, 11, 12, 33]

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

kde čárka v indexu značí derivaci. Vztah mezi složkami posuvů vektoru  $u_i$  a složkami tenzoru přetvoření  $\varepsilon_{ij}$  lze zapsat ve tvaru

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.2)$$

A konečně zobecněný Hookeův zákon (3.1) s uvažováním rovnice (5.2) a symetrických vlastností tenzoru  $C_{ijkl}$  (3.2) má tvar

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l}. \quad (5.3)$$

Substitucí (5.3) do (5.1) dostáváme diferenciální rovnici, kterou musí splňovat složky posuvů  $u_k$ , ve tvaru

$$C_{ijkl} u_{k,lj} = 0. \quad (5.4)$$

Diferenciální rovnice (5.4) tvoří soustavu homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu. Pro rovinnou deformaci platí, že

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_3} = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$u_k$  tedy závisí pouze na  $x_1$  a  $x_2$ , [5]. Obecné řešení rovnic (5.4)  $u_k$  budeme hledat ve tvaru lineární kombinace souřadnic  $x_1$  a  $x_2$ , [12, 33]. Zvolme

$$u_k = a_k f(z), \quad (5.5)$$

kde

$$z = x_1 + \mu x_2.$$

V předchozích dvou výrazech vystupuje libovolná funkce  $f(z)$ , dále komplexní vektor  $a_k$  a komplexní číslo  $\mu$ , které je nutno určit<sup>4</sup>. Derivací výrazu (5.5) podle  $x_l$  dostáváme

$$u_{k,l} = a_k \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx_l} = (\delta_{l1} + \mu \delta_{l2}) a_k f'(z), \quad (5.6)$$

kde  $\delta_{li}$  je Kroneckerovo delta, definované vztahem (B.3). Dalším derivováním předchozího výrazu podle  $x_j$  dostáváme

$$u_{k,lj} = [\delta_{l1}\delta_{j1} + \mu(\delta_{l1}\delta_{j2} + \delta_{l2}\delta_{j1}) + \mu^2\delta_{l2}\delta_{j2}] a_k f''(z) = 0.$$

Protože  $f''(z)$  je libovolná a nenulová funkce, rovnice (5.4) bude splněna, jestliže

$$\{C_{i1k1} + \mu(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + \mu^2 C_{i2k2}\} a_k = 0.$$

Tuto rovnici můžeme zapsat pomocí maticové symboliky ve tvaru

$$\{\mathbb{Q} + \mu(\mathbb{R} + \mathbb{R}^T) + \mu^2 \mathbb{T}\} \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (5.7)$$

kde  $T$  značí maticovou transpozici a  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{T}$  jsou matice  $3 \times 3$ , pro jejichž členy platí

$$Q_{ik} = C_{i1k1}, \quad R_{ik} = C_{i1k2}, \quad T_{ik} = C_{i2k2}. \quad (5.8)$$

Pro matice  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{T}$  dále platí, že jsou pozitivně definitní [12, 33]. Pro netriviální řešení  $\mathbf{a}$  musí být

$$\det [\mathbb{Q} + \mu(\mathbb{R} + \mathbb{R}^T) + \mu^2 \mathbb{T}] = 0, \quad (5.9)$$

dostáváme tedy rovnici šestého stupně pro  $\mu$ . Kvůli podmínce o kladné deformační energii je dokázáno [33], že rovnice nemůže mít kořeny reálné, nýbrž tři páry kořenů komplexně sdružených, které označíme  $\mu_k$  a  $\bar{\mu}_k$ . Po určení kořenů  $\mu_k$  k získání  $\mathbf{a}$  zpětně dosadíme do (5.7). Jelikož  $\mu_k$  a  $\mathbf{a}$  stanovené z (5.9) a (5.7) závisí pouze na  $C_{ijkl}$ , nazýváme je *vlastními čísly materiálu*<sup>5</sup> a *vlastními vektory materiálu*. Vlastní čísla materiálu a vlastní vektory materiálu jsou komplexně sdružené, což můžeme zapsat [12]

$$\Im \mu_k > 0, \quad \mu_{k+3} = \bar{\mu}_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{a}_{k+3} = \bar{\mathbf{a}}_k. \quad (5.11)$$

<sup>4</sup>Symbolem  $\mu$  zde není myšlena druhá Lamého konstanta, která je v této práci značena, jak je zvykem v inženýrské praxi, tedy symbolem  $G$ .

<sup>5</sup>Vlastní čísla materiálu jsou někdy také nazývána *charakteristická čísla materiálu*. Ačkoli  $\mu_k$  a  $\mathbf{a}$  nazýváme hodnotami vlastními, jejich řešení neodpovídá standardnímu tvaru řešení problému vlastních hodnot  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .

Složky tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$  získáme dosazením rovnice (5.6) do (5.3) a díky (5.8) dostáváme

$$\begin{aligned}\sigma_{i1} &= (Q_{ik} + \mu R_{ik}) a_k f'(z), \\ \sigma_{i2} &= (R_{ki} + \mu T_{ik}) a_k f'(z).\end{aligned}\tag{5.12}$$

Pro zjednodušení zápisu zavedme vektor  $\mathbf{b}$  vycházející z (5.7) jako

$$\mathbf{b} = (\mathbb{R}^T + \mu \mathbb{T}) \mathbf{a} = -\frac{1}{\mu} (\mathbb{Q} + \mu \mathbb{R}) \mathbf{a},\tag{5.13}$$

který je podobně jako vlastní vektor materiálu (5.11) komplexně sdružený

$$\mathbf{b}_{k+3} = \overline{\mathbf{b}_k}.$$

Vztahy pro složky tenzoru napětí (5.12) potom píšeme

$$\begin{aligned}\sigma_{i1} &= -\mu b_i f'(z), \\ \sigma_{i2} &= b_i f'(z).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Podobně jako při zavedení Airyho funkce napětí v dodatku B, která automaticky splňuje rovnici rovnováhy (5.1), je výhodné zavést *funkci napětí*  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_{i1} &= -\phi_{i,2}, \\ \sigma_{i2} &= \phi_{i,1}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Díky symetrickým vlastnostem složek napětí  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$  jsou složky funkce napětí provázány vztahem [33]

$$\phi_{1,1} + \phi_{2,2} = 0.$$

Porovnáním rovnice (5.14) s (5.15) dostáváme

$$\phi_i = b_i f(z), \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{b} f(z).$$

Obecné řešení můžeme zapsat

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \sum_{k=1}^3 \{ \mathbf{a}_k f_k(z_k) + \overline{\mathbf{a}_k} f_{k+3}(\overline{z_k}) \}, \\ \boldsymbol{\phi} &= \sum_{k=1}^3 \{ \mathbf{b}_k f_k(z_k) + \overline{\mathbf{b}_k} f_{k+3}(\overline{z_k}) \}\end{aligned}\tag{5.16}$$

Pro získání reálného řešení vektoru posuvů  $\mathbf{u}$  a vektoru funkce napětí  $\boldsymbol{\phi}$  zavedme

$$f_{k+3} = \overline{f_k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Potom vztahy (5.16) přechází v

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= 2\Re \sum_{k=1}^3 \{ \mathbf{a}_k f_k(z_k) \}, \\ \boldsymbol{\phi} &= 2\Re \sum_{k=1}^3 \{ \mathbf{b}_k f_k(z_k) \},\end{aligned}$$

Tyto můžeme pomocí maticové symboliky zapsat jako

$$\mathbf{u} = 2\Re \{ \mathbb{A} \mathbf{f}(z_k) \}, \quad (5.17)$$

$$\boldsymbol{\phi} = 2\Re \{ \mathbb{B} \mathbf{f}(z_k) \}, \quad (5.18)$$

kde

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{f}(z) = \begin{bmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_2) & f_3(z_3) \end{bmatrix}^T.$$

Při použití výše uvedených sloupcových vektorů, vztah (5.16) můžeme vyjádřit [12, 33]

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \overline{\mathbb{A}} \\ \mathbb{B} & \overline{\mathbb{B}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(z) \\ \overline{\mathbf{f}(z)} \end{Bmatrix}. \quad (5.21)$$

## 5.2. Okrajové podmínky

Obecné řešení splňující 15 rovnic (5.1), (5.2), (3.1) je odvozeno ve vztazích (5.17) pro vektor posuvů  $\mathbf{u}$  a vektor funkce napětí  $\boldsymbol{\phi}$ . V těchto vztazích jsou matice  $\mathbb{A}$  a  $\mathbb{B}$  plně určeny, jsou-li známy materiálové charakteristiky. Funkce  $\mathbf{f}(z)$  určíme ze znalosti okrajových podmínek [12]. Okrajové podmínky předepsané pomocí posuvů zapíšeme

$$\mathbf{u} = 2\Re \{ \mathbb{A} \mathbf{f}(z) \} = \hat{\mathbf{u}},$$

kde  $\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \end{pmatrix}$  jsou posuvy předepsané na hranici oblasti. K předepsání okrajových podmínek pomocí napětí, je třeba najít vztah mezi vektorem funkce napětí  $\boldsymbol{\phi}$  a *vektorem napětí*  $\mathbf{t}$ . Pro rovinnou úlohu, kde  $n_3 = 0$ , můžeme zapsat *Cauchyho rovnici* pro složky vektoru napětí  $t_i$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2. \quad (5.22)$$

Dosazením (5.15) do rovnice (5.22) a při uvážení vztahů mezi normálovým a tečným vektorem hranice oblasti, jak ilustruje obrázek 5.1,

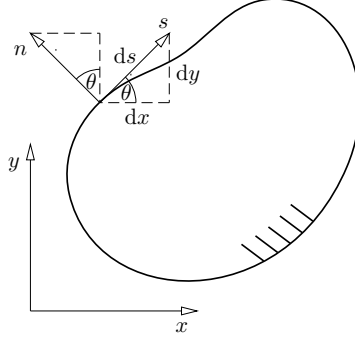
$$n_1 = -\frac{dy}{ds}, \quad n_2 = \frac{dx}{ds},$$

dostáváme rovnici

$$t_i = \frac{d\phi_i}{dx_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{d\phi_i}{dx_2} \frac{dx_2}{ds} = \frac{d\phi_i}{ds},$$

kterou můžeme vektorově vyjádřit

$$\mathbf{t} = \frac{d\boldsymbol{\phi}}{ds}. \quad (5.23)$$



Obrázek 5.1: Materiálová oblast s naznačeným tečným a normálním směrem hranice.

Poznamenejme, že pro zachování správného znaménka ve vztahu (5.24) musí být splněn tento předpoklad: směr tečného vektoru  $s$  je zvolen tak, že při pohybu po hranici oblasti v tomto směru, leží oblast napravo jako na obrázku 5.1 [12, 33]. Celkové napětí podél hranice oblasti je potom vyjádřeno

$$\mathbf{T} = \int_{s_2}^{s_1} \mathbf{t} ds = \phi(s_2) - \phi(s_1).$$

Okrajové podmínky předepsané pomocí vektoru napětí  $\hat{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} \hat{t}_1 & \hat{t}_2 & \hat{t}_3 \end{pmatrix}$  zapíšeme

$$\frac{d\phi}{ds} = 2\Re \left\{ \mathbb{B} \frac{df(z)}{ds} \right\} = \hat{\mathbf{t}} \quad (5.24)$$

nebo

$$\mathbf{T} = \phi(s_2) - \phi(s_1) = 2\Re \{ \mathbb{B} f(z) \} \Big|_{s_1}^{s_2} = \int_{s_2}^{s_1} \hat{\mathbf{t}} ds$$

### 5.3. Vlastní čísla materiálů

Z obecného řešení (5.17) je zřejmé, že vlastní čísla materiálu  $\mu_k$  a jim odpovídající vlastní vektory  $\mathbf{a}_k$  a  $\mathbf{b}_k$  plní důležitou roli v Strohově formalismu [12]. Tyto, jak bylo již uvedeno, získáme vyřešením (5.9), (5.7) a (5.13). Rozepíšeme-li vztahy (5.8), dostáváme

$$\mathbb{Q} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{16} & C_{66} & C_{56} \\ C_{15} & C_{56} & C_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} C_{16} & C_{12} & C_{14} \\ C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ C_{56} & C_{25} & C_{45} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{T} = \begin{bmatrix} C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ C_{26} & C_{22} & C_{24} \\ C_{46} & C_{24} & C_{44} \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Poznamenejme, že matice  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{T}$  jsou podmaticemi  $C_{\alpha\beta}$ , proto jsou symetrické a pozitivně definitní, tudíž  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{T}$  nejsou singulární. Rozepíšeme-li rovnici (5.7) s uvážením (5.25) obdržíme

$$\begin{bmatrix} C_{11} + 2\mu C_{16} + \mu^2 C_{66} & C_{16} + \mu(C_{12} + C_{66}) + \mu^2 C_{26} & C_{15} + \mu(C_{14} + C_{56}) + \mu^2(C_{46}) \\ & C_{66} + 2\mu C_{26} + \mu^2 C_{22} & C_{56} + \mu(C_{25} + C_{46}) + \mu^2 C_{24} \\ & & C_{55} + 2\mu C_{45} + \mu^2 C_{44} \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Vlastní čísla materiálu  $\mu$  získáme ze vztahu (5.9), tedy položíme-li determinant matice v předchozí rovnici roven nule, tj.

$$\det \begin{bmatrix} C_{11} + 2\mu C_{16} + \mu^2 C_{66} & C_{16} + \mu (C_{12} + C_{66}) + \mu^2 C_{26} & C_{15} + \mu (C_{14} + C_{56}) + \mu^2 (C_{46}) \\ & C_{66} + 2\mu C_{26} + \mu^2 C_{22} & C_{56} + \mu (C_{25} + C_{46}) + \mu^2 C_{24} \\ & & C_{55} + 2\mu C_{45} + \mu^2 C_{44} \end{bmatrix} = 0.$$

Tento determinant může být zjednodušen pro speciální typy materiálů, jako např. materiál ortotropní, příčně izotropní či izotropní, diskutované v kapitole 3. Výsledkem řešení determinantu, tedy rovnice 6. stupně pro  $\mu$ , jsou vlastní čísla materiálu. Podrobněji odvozuje vlastní čísla materiálů pro jednotlivé typy materiálů Ting v [33]. Pro izotropní materiál výše uvedená maticová rovnice nabývá po zjednodušení tvaru

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2G) + \mu^2 G & \mu (\lambda + G) & 0 \\ & G + \mu^2 (\lambda + 2G) & 0 \\ & & G(1 + \lambda) \end{bmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

Kde  $\lambda$  a  $G$  jsou Lamého konstanty (3.19). Po zjednodušení (5.26) dostáváme pro  $\mu$  rovnici

$$G^2 (\lambda + 2G) (1 + \mu^2)^3 = 0.$$

Jelikož platí, že Lamého konstanty jsou vždy kladné [33], jediným možným řešením je trojnásobný komplexně sdružený kořen

$$\mu = \pm i.$$

## 5.4. LES formalismus v případě ortotropního materiálu

Ve speciálním případě ortotropního materiálu zavedl Suo dva bezrozměrné parametry, [29]

$$\lambda = \frac{s_{11}}{s_{22}}, \quad \rho = \frac{(2s_{12} + s_{66})}{\sqrt{(s_{11}s_{22})}}.$$

Symbolem  $\lambda$  zde není myšlena první Lamého konstanta. Parametry  $\lambda$  a  $\rho$  vyjadřují míru anizotropie. Vykazuje-li materiál kubickou symetrii, platí  $\lambda = 1$ , jedná-li se o příčně izotropní materiál, pak  $\lambda = \rho = 1$ , [29]. Charakteristickou rovnici pro vlastní čísla ortotropního materiálu píšeme

$$\lambda \mu^4 + 2\rho \lambda^{\frac{1}{2}} \mu^2 + 1 = 0.$$

Aby byla splněna podmínka kladné deformační energie musí platit

$$\lambda > 1, \quad 1 < \rho < \infty.$$

Řešením jsou vlastní čísla materiálu ve tvaru

$$\begin{aligned} \mu_1 &= i\lambda^{-\frac{1}{4}}(n + m), \quad \mu_2 = i\lambda^{-\frac{1}{4}}(n - m), \quad \text{pro } 1 < \rho < \infty, \\ \mu_1 &= \lambda^{-\frac{1}{4}}(in + m), \quad \mu_2 = \lambda^{-\frac{1}{4}}(in - m), \quad \text{pro } -1 < \rho < 1, \\ \mu_1 &= \mu_2 = i\lambda^{-\frac{1}{4}}, \quad \text{pro } \rho = 1, \end{aligned}$$

kde parametry  $n$  a  $m$  určíme pomocí

$$n = \sqrt{\frac{(1+\rho)}{2}}, \quad m = \sqrt{\frac{(1-\rho)}{2}}.$$

V dalším budeme uvažovat, že  $\rho \neq 1$ . Napíšeme matici  $\mathbb{A}$ , která je obdobou matice (5.19) a matici vlastních čísel materiálu  $\mathbb{L}$  [6, 30, 33] pro případ ortotropního materiálu

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} s_{11}\mu_1^2 + s_{12} & s_{11}\mu_2^2 + s_{12} \\ s_{12}\mu_1 + s_{22}/\mu_1 & s_{12}\mu_2 + s_{22}/\mu_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{L} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

potom dostaneme vztahy pro posuvy  $u_i$ , napětí  $\sigma_{ij}$  (5.16) a složky vektoru napětí  $T_i$ , (5.24) ve tvaru

$$\begin{aligned} u_i &= 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^2 A_{ij} f_k(z_k) \right\}, & T_i &= -2\Re \left\{ \sum_{k=1}^2 L_{ik} f_k(z_k) \right\}, \\ \sigma_{2i} &= 2\Re \left\{ \sum_{k=1}^2 L_{ik} f'_k(z_k) \right\}, & \sigma_{1i} &= -2\Re \left\{ \sum_{k=1}^2 L_{ik} \mu_k f'_k(z_k) \right\}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Vektorové komplexní funkce  $f_k(z_k)$  závisí na zadaných okrajových podmínkách úlohy, [11, 29]. Zavedme pozitivně definitní hermitovskou<sup>6</sup> matici

$$\mathbb{B} = i\mathbb{A}\mathbb{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 2n\lambda^{\frac{1}{4}}(s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} & i[(s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} + s_{12}] \\ -i[(s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} + s_{12}] & 2n\lambda^{\frac{1}{4}}(s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Touto maticí není myšlena dříve uvedená matice (5.20). Potom matici  $\mathbb{H}$ , zahrnující bimateriálové charakteristiky píšeme

$$\mathbb{H} = \mathbb{B}_I + \overline{\mathbb{B}}_{II} = \begin{bmatrix} H_{11} & -i\beta(H_{11}H_{22})^{\frac{1}{2}} \\ i\beta(H_{11}H_{22})^{\frac{1}{2}} & H_{22} \end{bmatrix}.$$

Kde indexy I a II značí odlišné materiály. Pro členy matice  $\mathbb{H}$  platí

$$\begin{aligned} H_{11} &= \left[ 2n\lambda^{\frac{1}{4}}(s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} \right]_I + \left[ 2n\lambda^{\frac{1}{4}}(s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} \right]_{II}, \\ H_{22} &= \left[ 2n\lambda^{-\frac{1}{4}}(s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} \right]_I + \left[ 2n\lambda^{-\frac{1}{4}}(s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} \right]_{II} \end{aligned}$$

a tzv. *zobecněný Dundursův parametr* [6, 29], určíme pomocí vztahu

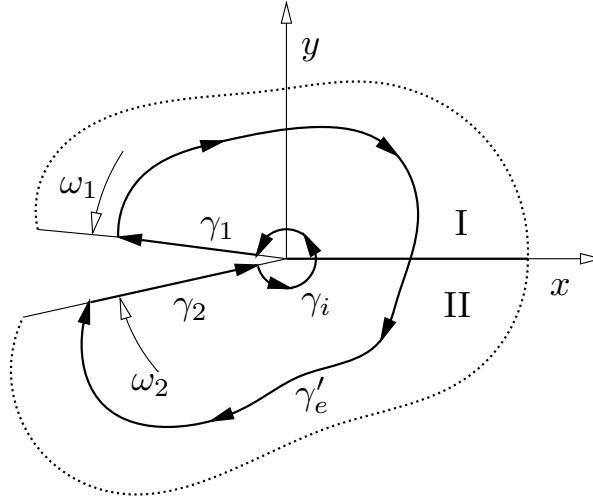
$$\beta = \frac{\left[ (s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} + s_{12} \right]_{II} - \left[ (s_{11}s_{22})^{\frac{1}{2}} + s_{12} \right]_I}{(H_{11}H_{22})^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.30)$$

---

<sup>6</sup>Rovná-li se komplexně sdružená transponovaná matice  $\overline{\mathbb{M}}^T$  původní matici, tj.  $\overline{\mathbb{M}}^T = \mathbb{M}$ , říkáme že matice  $\mathbb{M}$  je hermitovsky symetrická neboli hermitovská. Každá hermitovská matice, jejíž vlastní čísla jsou kladná, je pozitivně definitní [26].



## 6. $\Psi$ -integrál



Obrázek 6.1: Schématické znázornění integrační křivky  $\gamma = \gamma_i + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_e$ .

Pro popis napjatosti v okolí obecného koncentrátoru musíme kromě vlastních hodnot exponentů singularity<sup>7</sup>  $\delta_k$  určit také zobecněný součinitel intenzity napětí<sup>8</sup>  $H_k$ . Zatímco hodnoty  $\delta_k$  získáme řešením problému vlastních hodnot na základě znalosti okrajových podmínek úlohy, hodnoty  $H_k$  určíme pomocí numerického řešení. Existuje několik různých metod (např. *metoda přímé extrapolace*, viz [11, 15, 18]), tato práce se zaměřuje na metodu  $\Psi$ -integrálu. Tento integrál, někdy také nazývaný *H-integrál*, patří do skupiny na integrační cestě nezávislých integrálů. Jako další příklady uvedme *J-integrál* nebo *M-integrál* [12]. Metoda  $\psi$ -integrálu nám umožňuje určit napjatost v blízkosti singulárního bodu pomocí pole napětí vzdálených bodů, kde výsledky získané např. metodou konečných prvků vykazují vysokou přesnost [24]. Tato efektivní metoda je implikací *Bettiho recipročního teorému*, který říká, že je-li těleso vystaveno působení dvou systémů sil, tak práce vykonaná prvním systémem na složkách posuvů druhého systému je stejná jako práce, kterou vykoná druhý systém na složkách posuvů prvního [12, 13]. Při zanedbání objemových sil můžeme Bettiho teorém zapsat

$$\oint_{\gamma} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds = 0, \quad (6.1)$$

kde  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{t}$  je vektor posuvů a vektor napětí tzv. *aktuálního řešení*. Symboly  $\hat{\mathbf{u}}$  a  $\hat{\mathbf{t}}$  značíme tzv. *pomocné řešení*. Necht  $\gamma$  je uzavřená křivka, skládající se z křivek  $\gamma_i$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma'_e$ , jako na obr. 6.1. Protože na volných površích vrubu platí  $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}} = 0$  (pro křivky  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ ) z předchozího vztahu (6.1) vyplývá

$$\int_{\gamma_i} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds = - \int_{\gamma'_e} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds = \int_{\gamma_e} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds$$

<sup>7</sup>Dále jen VHES.

<sup>8</sup>Dále jen ZSIN.

kde  $\gamma_i$  a  $\gamma_e$  jsou křivky jdoucí od líce vrubu  $\theta = -\omega_2$  k líci vrubu  $\theta = \omega_1$  proti směru hodinových ručiček. Potom  $\psi$ -integrál je definován [12, 14, 24] jako

$$\psi = \int_{\gamma} (\mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{t}) ds. \quad (6.2)$$

Uvažujme případ komplexně sdružených VHES<sup>9</sup>, který odpovídá případu velmi ostrého vrubu nebo trhliny na bimateriálovém rozhraní. Použití  $\psi$ -integrálu v případě reálných VHES lze nalézt např. v [11]. Funkci  $\mathbf{f}(z)$  můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{f}(z) = H\mathbb{Z}^{\delta}\mathbf{v} + \overline{H}\mathbb{Z}^{\overline{\delta}}\overline{\mathbf{w}}, \quad (6.3)$$

kde  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{w}$  jsou vlastní vektory. Pro vektor posuvů a funkci napětí platí

$$\mathbf{u}(r, \theta) = \mathbb{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbb{A}}\overline{\mathbf{f}}(z), \quad (6.4)$$

$$\phi(r, \theta) = \mathbb{L}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbb{L}}\overline{\mathbf{f}}(z). \quad (6.5)$$

Matice  $\mathbb{A}$  a  $\mathbb{L}$  jsou definovány vztahy (5.27). Dosadíme-li (6.3) do (6.4) a uvažujeme-li exponent singularity ve tvaru  $\delta = \delta_R \pm i\varepsilon$ , můžeme výše uvedené vztahy vyjádřit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(z) &= \mathbb{A} \left( H\mathbb{Z}^{\delta}\mathbf{v} + \overline{H}\mathbb{Z}^{\overline{\delta}}\overline{\mathbf{w}} \right) + \overline{\mathbb{A}} \left( \overline{H}\mathbb{Z}^{\overline{\delta}}\overline{\mathbf{v}} + H\mathbb{Z}^{\delta}\mathbf{w} \right) \\ &= H \left( \mathbb{A}\mathbb{Z}^{\delta}(r, \theta)\mathbf{v} + \overline{\mathbb{A}}\mathbb{Z}^{\overline{\delta}}(r, \theta)\mathbf{w} \right) + \overline{H} \left( \mathbb{A}\mathbb{Z}^{\overline{\delta}}(r, \theta)\overline{\mathbf{w}} + \overline{\mathbb{A}}\mathbb{Z}^{\delta}(r, \theta)\overline{\mathbf{v}} \right) \\ &= r^{\delta_R} \left\{ Hr^{i\varepsilon} \underbrace{\left( \mathbb{A}\mathbb{Z}(\theta)\mathbf{v} + \overline{\mathbb{A}}\mathbb{Z}(\theta)\mathbf{w} \right)}_{\boldsymbol{\eta}(\theta)} + \overline{H}r^{-i\varepsilon} \underbrace{\left( \mathbb{A}\mathbb{Z}(\theta)\overline{\mathbf{w}} + \overline{\mathbb{A}}\mathbb{Z}(\theta)\overline{\mathbf{v}} \right)}_{\overline{\boldsymbol{\eta}}(\theta)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Vektor posuvů můžeme ve výsledném tvaru tedy zapsat

$$\mathbf{u}(z) = r^{\delta_R} \left\{ Hr^{i\varepsilon}\boldsymbol{\eta}(\theta) + \overline{H}r^{-i\varepsilon}\overline{\boldsymbol{\eta}}(\theta) \right\}, \quad (6.7)$$

který odpovídá vztahu (4.13) uvedeném již ve 4. kapitole. Obdobným způsobem, tedy dosazením (6.3) do rovnice (6.5) pro funkci napětí dostáváme

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \mathbb{L} \left( H\mathbb{Z}^{\delta}\mathbf{v} + \overline{H}\mathbb{Z}^{\overline{\delta}}\overline{\mathbf{w}} \right) + \overline{\mathbb{L}} \left( \overline{H}\mathbb{Z}^{\overline{\delta}}\overline{\mathbf{v}} + H\mathbb{Z}^{\delta}\mathbf{w} \right) \\ &= H \left( \mathbb{L}\mathbb{Z}^{\delta}(r, \theta)\mathbf{v} + \overline{\mathbb{L}}\mathbb{Z}^{\overline{\delta}}(r, \theta)\mathbf{w} \right) + \overline{H} \left( \mathbb{L}\mathbb{Z}^{\overline{\delta}}(r, \theta)\overline{\mathbf{w}} + \overline{\mathbb{L}}\mathbb{Z}^{\delta}(r, \theta)\overline{\mathbf{v}} \right) \\ &= r^{\delta_R} \left\{ Hr^{i\varepsilon} \underbrace{\left( \mathbb{L}\mathbb{Z}(\theta)\mathbf{v} + \overline{\mathbb{L}}\mathbb{Z}(\theta)\mathbf{w} \right)}_{\boldsymbol{\lambda}(\theta)} + \overline{H}r^{-i\varepsilon} \underbrace{\left( \mathbb{L}\mathbb{Z}(\theta)\overline{\mathbf{w}} + \overline{\mathbb{L}}\mathbb{Z}(\theta)\overline{\mathbf{v}} \right)}_{\overline{\boldsymbol{\lambda}}(\theta)} \right\}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

a výsledný vztah obdržíme ve tvaru

$$\phi(z) = r^{\delta_R} \left\{ Hr^{i\varepsilon}\boldsymbol{\lambda}(\theta) + \overline{H}r^{-i\varepsilon}\overline{\boldsymbol{\lambda}}(\theta) \right\}, \quad (6.9)$$

<sup>9</sup>Přestože platí,  $H_k$ ,  $k = 1, 2$  nebudeme dále značit ZSIN indexem  $k$ . Při konfiguraci trhliny na bimateriálovém rozhraní, zkoumané v předkládané práci, jsou totiž hodnoty  $H$  komplexně sdružené a platí  $H_1 = H$ ,  $H_2 = \overline{H}$ .

jehož derivačí podle souřadnic  $x$  a  $y$  bychom získali vztahy pro napětí  $\sigma_{xi}$  a  $\sigma_{yi}$ , vztah (4.12). Pro funkci  $\boldsymbol{\eta}(\theta)$  tedy platí vztah

$$\boldsymbol{\eta}(\theta) = \mathbb{A}\mathbb{Z}(\theta) \mathbf{v} + \overline{\mathbb{A}\mathbb{Z}}(\theta) \mathbf{w}. \quad (6.10)$$

Obdobně funkci  $\boldsymbol{\lambda}(\theta)$  píšeme

$$\boldsymbol{\lambda}(\theta) = \mathbb{L}\mathbb{Z}(\theta) \mathbf{v} + \overline{\mathbb{L}\mathbb{Z}}(\theta) \mathbf{w}, \quad (6.11)$$

a pro její derivaci derivaci  $\boldsymbol{\lambda}'(\theta)$  podle souřadnice  $\theta$  platí

$$\boldsymbol{\lambda}'(\theta) = \mathbb{L}\mathbb{Z}'(\theta) \mathbf{v} + \overline{\mathbb{L}\mathbb{Z}'}(\theta) \mathbf{w}. \quad (6.12)$$

Vektor napětí  $\mathbf{t}$  pomocí vzorce (5.23) vyjádříme

$$\mathbf{t} = \frac{d\phi}{d\theta} \frac{1}{r}, \quad (6.13)$$

s využitím vztahů (6.13), (6.8) a (6.12) můžeme výsledný vztah pro vektor napětí zapsat

$$\mathbf{t} = r^{\delta_R-1} \left\{ H r^{i\epsilon} \boldsymbol{\lambda}'(\theta) + \overline{H} r^{-i\epsilon} \overline{\boldsymbol{\lambda}'}(\theta) \right\}.$$

Výraz pro diagonální matici  $\mathbb{Z}$  a její derivaci  $\mathbb{Z}'$ , kde vlastní číslo materiálu uvažujeme ve tvaru  $\mu = \mu' + i\mu''$  [24] je

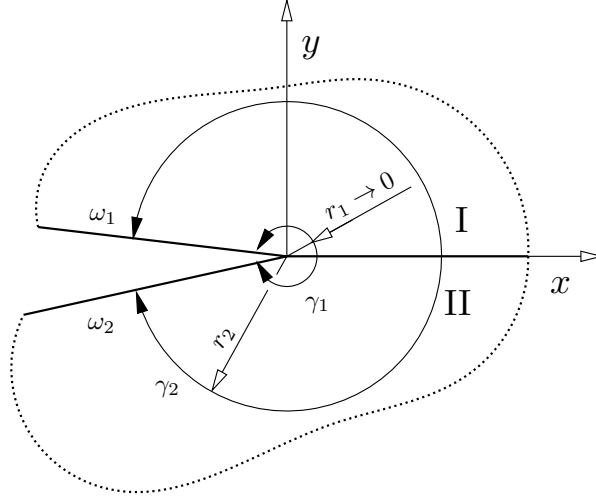
$$\begin{aligned} \mathbb{Z}(\theta) &= \text{diag} \left[ (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^\delta, (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^\delta \right] \\ &= \text{diag} \left[ R_1^\delta(\theta) e^{i\delta\psi(\theta)}, R_2^\delta(\theta) e^{i\delta\psi(\theta)} \right], \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}'(\theta) &= \text{diag} \left[ \delta \left( (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{\delta-1} (-\sin \theta + \mu_1 \cos \theta) \right), \right. \\ &\quad \left. \delta \left( (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{\delta-1} (-\sin \theta + \mu_2 \cos \theta) \right) \right] \\ &= \text{diag} \left[ \delta R_1^{\delta-1}(\theta) e^{i(\delta-1)\psi_1(\theta)} (-\sin \theta + \mu_1 \cos \theta), \right. \\ &\quad \left. \delta R_2^{\delta-1}(\theta) e^{i(\delta-1)\psi_2(\theta)} (-\sin \theta + \mu_2 \cos \theta) \right], \end{aligned} \quad (6.15)$$

kde  $R_j$  a  $\psi_j(\theta)$  určíme pomocí vztahů

$$R_j^2(\theta) = (\cos \theta + \mu'_j \sin \theta)^2 + (\mu''_j \sin \theta)^2, \quad j = 1, 2.$$

$$\psi_j(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \theta = 0, \\ \arccot \left( \left( \cos \theta + \mu'_j \sin \theta / \mu''_j \sin \theta \right) \right) & \text{pro } \theta \in (0, \pi), \\ \arccot \left( \left( \cos \theta + \mu'_j \sin \theta / \mu''_j \sin \theta \right) \right) - \pi & \text{pro } \theta \in (-\pi, 0), \\ 0 & \text{pro } \theta = -\pi. \end{cases} \quad j = 1, 2$$

Obrázek 6.2: Kruhová integrační cesta  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ .

Matice komplexně sdružené  $\overline{\mathbb{Z}}(\theta)$  a  $\overline{\mathbb{Z}}'(\theta)$  vyjádříme

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{Z}}(\theta) &= \text{diag} \left[ (\cos \theta + \overline{\mu}_1 \sin \theta)^\delta \quad (\cos \theta + \overline{\mu}_2 \sin \theta)^\delta \right] \\ &= \text{diag} \left[ R_1^\delta(\theta) e^{-i\delta\psi_1(\theta)} \quad R_2^\delta(\theta) e^{-i\delta\psi_2(\theta)} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{Z}}'(\theta) &= \text{diag} \left[ \delta \left( (\cos \theta + \overline{\mu}_1 \sin \theta)^{\delta-1} (-\sin \theta + \overline{\mu}_1 \cos \theta) \right) \right. \\ &\quad \left. \delta \left( (\cos \theta + \overline{\mu}_2 \sin \theta)^{\delta-1} (-\sin \theta + \overline{\mu}_2 \cos \theta) \right) \right] \\ &= \text{diag} \left[ \delta R_1^{\delta-1}(\theta) e^{-i(\delta-1)\psi_1(\theta)} (-\sin \theta + \overline{\mu}_1 \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. \delta R_2^{\delta-1}(\theta) e^{-i(\delta-1)\psi_2(\theta)} (-\sin \theta + \overline{\mu}_2 \cos \theta) \right].\end{aligned}$$

Pomocné a duální řešení  $\psi$ -integrálu předpokládáme [12] ve tvaru

$$\hat{\mathbf{u}}(r, \theta) = \hat{H} r^{-(1-\delta_R+i\varepsilon)} \hat{\boldsymbol{\eta}}(\theta), \quad \hat{\mathbf{t}}(r, \theta) = \hat{H} r^{-(2-\delta_R+i\varepsilon)} \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta). \quad (6.16)$$

Uvažujeme-li integrační cestu v těsné blízkosti singularity a zvolíme-li vhodné pomocné řešení, můžeme na základě předchozích vztahů vyjádřit  $\psi$ -integrál jako funkci  $\text{ZSIN } H$  [12, 24]. Nej-jednodušším způsobem řešení je kruhová cesta  $\gamma_1$  z  $\omega_2$  do  $\omega_1$ , jako na obrázku 6.2. Substitucí (6.16) do (6.2) dostáváme na polární souřadnici  $r$  nezávislý výsledný vztah pro  $\psi$ -integrál

$$\psi = H \int_{-\omega_2}^{\omega_1} \left( \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - \hat{\boldsymbol{\eta}}^T(\theta) \boldsymbol{\lambda}'(\theta) \right) d\theta. \quad (6.17)$$

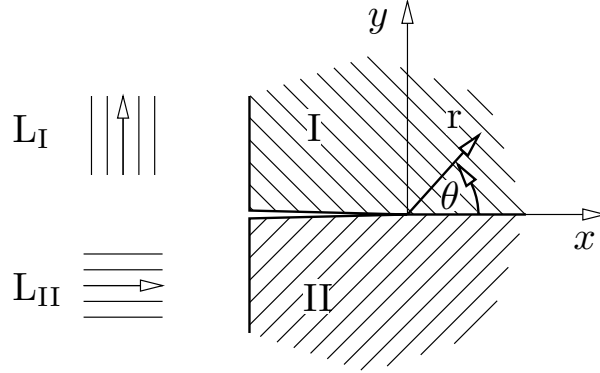
Odvození vztahu (6.17) je možno nalézt v [12]. Zavedme druhý  $\psi$ -integrál, jehož hodnotu určíme za pomoci numerického řešení [11, 24]. Označme jej  $\psi^M$ , jestliže  $\hat{H} = 1$  můžeme psát

$$\psi^M = \int_{-\omega_2}^{\omega_1} r^{-\delta} \left[ \left( \mathbf{u}^M \right)^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - r \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \mathbf{t}^M \right] d\theta.$$

Hodnoty vektorů posuvů  $\mathbf{u}^M$  a napětí  $\mathbf{t}^M$  získáme pomocí metody konečných prvků. Jako integrační křivku volíme kružnici  $r = r_2$  viz obr. 6.2, kde jsou výsledky získané MKP dostatečně přesné. Potom ZSIN  $H$  obdržíme ze vztahu

$$H = \frac{\psi^M}{\psi} = \frac{\int_{-\omega_2}^{\omega_1} r^{-\delta} \left[ \left( \mathbf{u}^M \right)^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}(\theta) - r \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \mathbf{t}^M \right] d\theta}{\int_{-\omega_2}^{\omega_1} \left( \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - \hat{\boldsymbol{\eta}}^T(\theta) \boldsymbol{\lambda}'(\theta) \right) d\theta}. \quad (6.18)$$

## 7. Výpočet vlastní hodnoty exponentu singularity



Obrázek 7.1: Trhlina na bimateriálovém rozhraní, indexy I a II značí odlišné materiály. V levé části obrázku jsou znázorněny longitudinální směry jednotlivých materiálů.

### 7.1. Řešení na základě problému vlastních hodnot

Uvažujme případ trhliny na rozhraní dvou příčně izotropních materiálů. Nejdříve je třeba zformulovat okrajové podmínky. Pro konfiguraci trhliny na bimateriálovém rozhraní, znázorněnou na obrázku 7.1 existují okrajové podmínky dvojího druhu. Na volných površích vrubu je vektor napětí, viz vztah (6.5),  $\mathbf{T}^J$  nulový. Index  $J = \text{I, II}$  značí materiálovou vrstvu

$$\mathbf{T}^{\text{I}} = \boldsymbol{\phi}^{\text{I}}(r, \theta) = 0, \quad \text{pro } \theta = \pi, \quad (7.1a)$$

$$\mathbf{T}^{\text{II}} = \boldsymbol{\phi}^{\text{II}}(r, \theta) = 0, \quad \text{pro } \theta = -\pi, \quad (7.1b)$$

A protože předpokládáme dokonalé spojení materiálů I a II, předepisujeme na rozhraní podmínky rovnosti posuvů a rovnosti napětí, rovnice (6.4) a (6.5),

$$\mathbf{u}^{\text{I}}(r, \theta) = \mathbf{u}^{\text{II}}(r, \theta) \quad \text{pro } \theta = 0, \quad (7.1c)$$

$$\mathbf{T}^{\text{I}} = \boldsymbol{\phi}(r, \theta) = \mathbf{T}^{\text{II}} = \boldsymbol{\phi}(r, \theta) \quad \text{pro } \theta = 0. \quad (7.1d)$$

Na základě výše uvedených okrajových podmínek (7.1a–7.1d), vztahů (6.10) a (6.11), kde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^J &= \boldsymbol{\eta}^J, \\ \mathbf{T}^J &= \boldsymbol{\lambda}^J \end{aligned}$$

můžeme sestavit soustavu osmi rovnic. Tato se dá vždy redukovat na soustavu dvou rovnic [24]

$$\mathbb{K}(\delta_k) \mathbb{L}^{\text{I}} \mathbf{v}_k^{\text{I}} = \mathbf{0}, \quad (7.2)$$

kde  $\mathbf{v}_k^I$  je vlastní vektor a  $\mathbf{0}$  je nulový vektor  $2 \times 1$ . Matici  $\mathbb{K}$  vyjádříme

$$\mathbb{K} = \mathbb{B}^I + \overline{\mathbb{B}^I} \mathbb{Y}^I - \left( \mathbb{B}^{II} + \overline{\mathbb{B}^{II}} \mathbb{Y}^{II} \right) \left( \mathbb{E} - \mathbb{Y}^{II} \right)^{-1} \left( \mathbb{E} - \mathbb{Y}^I \right)^{-1},$$

kde matici  $\mathbb{B}^J$  získáme ze vztahu (5.29),  $\mathbb{E}$  je jednotková matice a pro matice  $\mathbb{Y}$ ,  $\mathbb{X}$  platí

$$\mathbb{Y}^J = \left( \overline{\mathbb{X}^J} \right)^{-1} \mathbb{X}^J, \quad \mathbb{X}^J = \mathbb{L}^J \mathbb{Z}_k^J \left( \omega^J \right) \left( \mathbb{L}^J \right)^{-1}$$

Aby soustava (7.2) měla netriviální řešení, musí platit

$$\det(\mathbb{K}(\delta_k)) = 0. \quad (7.3)$$

Dostáváme nelineární rovnici proměnné  $\delta_k$ . Kvůli omezením, plynoucím z konečné velikosti deformační energie a singulárního charakteru členu asymptotického rozvoje, uvažujeme pouze kořeny ležící v intervalu  $0 < \delta_k < 1$ . Dá se ukázat [24], že řešením rovnice (7.3) jsou také tzv. *pomocná řešení*  $\hat{\delta}_k = -\delta_k$  a jim odpovídající pomocné vlastní vektory  $\mathbf{v}_{pom}^J$ . Pomocná řešení  $\hat{\delta}_k$  nemají fyzikální význam, ale jejich znalost je potřebná k určení ZFIN  $H_k$  na základě metody  $\psi$ -integrálu [11, 24]. Dosadíme-li kořeny  $\delta_k$  resp.  $\hat{\delta}_k$  zpět do rovnice (7.2), dostaneme odpovídající vlastní vektory  $\mathbf{v}_k^I$  resp.  $\mathbf{v}_{pom}^I$ . Zbývající vlastní vektory získáme pomocí

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k^{II} &= \left( \mathbb{E} - \mathbb{Y}^{II} \right)^{-1} \left( \mathbb{E} - \mathbb{Y}^I \right) \mathbf{v}_k^I, \\ \mathbf{w}_k^J &= -\mathbb{Y}^J \mathbf{v}_k^J. \end{aligned} \quad (7.4)$$

## 7.2. Určení vlastních hodnot exponentů singularity konkrétních materiálových konfigurací

Označení materiálů	$E_L$ [Gpa]	$E_T$ [Gpa]	$\nu_{LT}$ [-]	$\nu_{TT'}$ [-]	$G_{LT}$ [GPa]
M <sub>I</sub>	100	40	0,30	0,30	5
M <sub>II</sub>	150	50	0,25	0,20	10
M <sub>III</sub>	175	80	0,25	0,22	12
M <sub>IV</sub>	200	85	0,30	0,15	14

Tabulka 1: Materiálové charakteristiky materiálů M<sub>I</sub>, M<sub>II</sub>, M<sub>III</sub>, M<sub>IV</sub>

Uvažujme 4 různé příčně izotropní materiály uvedené v tabulce 1 a konfiguraci znázorněnou na obrázku 7.1. Výpočet hodnot VHES je, na základě teorie uvedené v předchozí podkapitole, naprogramován jako numerický algoritmus v jazyce FORTRAN. Rovnice 7.3 má pro případ trhliny na bimateriálovém rozhraní dva komplexně sdružené kořeny, tj.  $\delta_1 = \delta$ ,  $\delta_2 = \bar{\delta}$ . Pro VHES tedy můžeme psát

$$\delta = \delta_R + i\varepsilon, \quad \bar{\delta} = \delta_R - i\varepsilon,$$

kde reálná složka  $\delta_R$  je pro konfiguraci trhliny na bimateriálovém rozhraní vždy rovna  $\frac{1}{2}$ . Imaginární složky VHES určíme pro ortotropní materiál pomocí vztahu [29],

$$\varepsilon = \ln \frac{((1 - \beta)(1 + \beta))}{2\pi},$$

kde  $\beta$  je Dundursův parametr definovaný pomocí vztahu (5.30). Hodnoty  $\varepsilon$  jsou bezrozměrné a závisí na kombinaci materiálů. Srovnání vypočtených hodnot pro konkrétní materiály znázorňuje histogram 7.2. V tabulce 2 jsou shrnuty vypočtené komplexně sdružené VHES  $\delta$  a  $\bar{\delta}$  a odpovídající vlastní vektory

$$\mathbf{v}_{FRT} = (v_1, v_2),$$

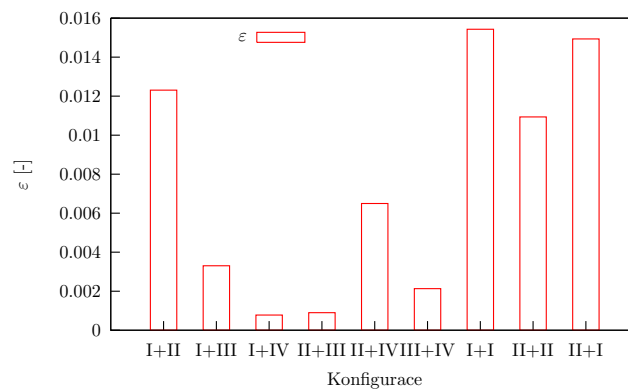
pro jeden z materiálů bimateriálové kombinace. Druhý vlastní vektor je možno dopočítat ze vztahu

$$\mathbf{w}_{FRT} = e^{-2\pi\varepsilon} \mathbf{v}_{FRT}.$$

Vektory pro druhý materiál bimateriálové kombinace je možno určit ze vztahu 7.4.

Konfigurace I + II	$\delta$	$\bar{\delta}$	$v_1$	$v_2$
$M_I + M_{II}$	$0,5 - 0,012308771i$	$0,5 + 0,012308771i$	$-0,5i$	$0,49742499$
$M_I + M_{III}$	$0,5 - 0,0033035092i$	$0,5 + 0,0033035092i$	$-0,5i$	$0,52430569$
$M_I + M_{IV}$	$0,5 - 0,00077708659i$	$0,5 + 0,00077708659i$	$-0,5i$	$0,52770650$
$M_{II} + M_{III}$	$0,5 + 0,00089951455i$	$0,5 - 0,00089951455i$	$-0,5i$	$-0,52714475$
$M_{II} + M_{IV}$	$0,5 + 0,0064960067i$	$0,5 - 0,0064960067i$	$-0,5i$	$0,53179938$
$M_{III} + M_{IV}$	$0,5 - 0,0021305794i$	$0,5 + 0,0021305794i$	$-0,5i$	$0,49798767$
$M_I + M_I$	$0,5 - 0,015430836i$	$0,5 + 0,015430836i$	$-0,5i$	$0,48593897$
$M_{II} + M_{II}$	$0,5 - 0,010936272i$	$0,5 + 0,010936272i$	$-0,5i$	$-0,49308974$
$M_{II} + M_I$	$0,5 - 0,014934418i$	$0,5 + 0,014934418i$	$-0,5i$	$0,49520553$

Tabulka 2: Komplexně sdružené vlastní hodnoty exponentů singularity  $\delta, \bar{\delta}$  a odpovídající vlastní vektor  $\mathbf{v}_{FRT}$  pro rozdílné kombinace materiálů. V případech, kdy se materiálové označení shodují tj.  $M_I + M_I$  a  $M_{II} + M_{II}$  uvažujeme stejné materiály, ovšem s kolmo na sebe orientovanými směry  $L$ . V případě posledním, tj.  $M_{II} + M_I$  uvažujeme stejné materiály jako v případě  $M_I + M_{II}$ , ale oba materiály mají směry  $L$  pootočené o  $90^\circ$ .



Obrázek 7.2: Grafické srovnání hodnot  $\varepsilon$  pro různé bimateriálové konfigurace. Římské číslice značí rozdílné materiály  $M_i$ ,  $i = I, II, III, IV$ .



## 8. Výpočet zobecněného součinitele intenzity napětí

Algoritmus výpočtu zobecněného součinitele intenzity napětí  $H$  pomocí metody  $\psi$ -integrálu popsané v kapitole 6 můžeme rozdělit do dvou hlavních částí. První část tvoří určení napětí a posuvů ve volitelné vzdálenosti od singularity, která by měla být dostatečně velká. Ve větší vzdálenosti od singularity totiž numerické metody výpočtu vykazují vysokou přesnost, což tvoří základní myšlenku určení ZSIN  $H$  pomocí  $\psi$ -integrálu. Numerickou metodou pro určení pole posuvů a napětí bude v našem případě metoda konečných prvků v CAE softwaru ANSYS. V části druhé je třeba získané parametry na základě matematické teorie  $\psi$ -integrálu zpracovat a numericky integrovat. K tomu slouží výpočtový algoritmus naprogramovaný v jazyce FORTRAN v softwaru Silverfrost FTN95.

### 8.1. Určení pole napětí a posuvů pomocí MKP

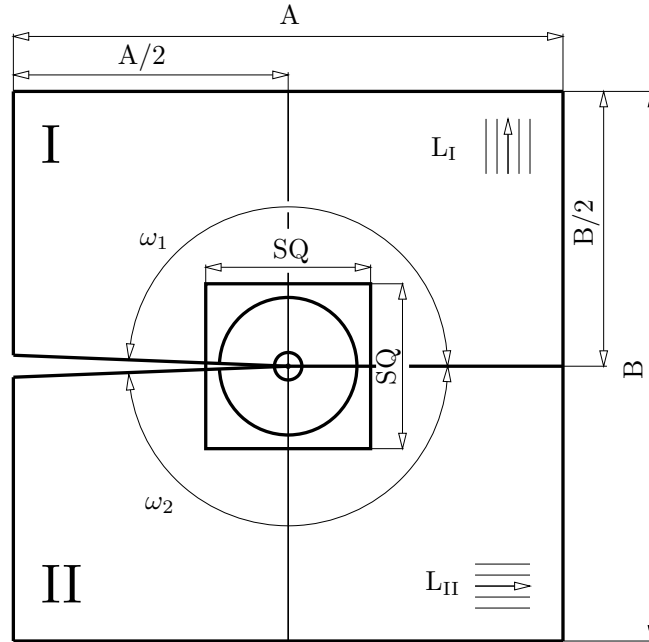
Pro jednoduché opakování výpočtu a snadné zadávání vstupních parametrů bylo napsáno makro, které lze načíst v ANSYS. Byl vytvořen dvojrozměrný model představující zkušební bimateriálové těleso s vrubem, jako na obrázku 8.1. Jeho rozměry jsou shrnuty v tabulce 3.

A [mm]	150	$R_1$ [mm]	0,001
B [mm]	150	$R_2$ [mm]	20
SQ [mm]	50		

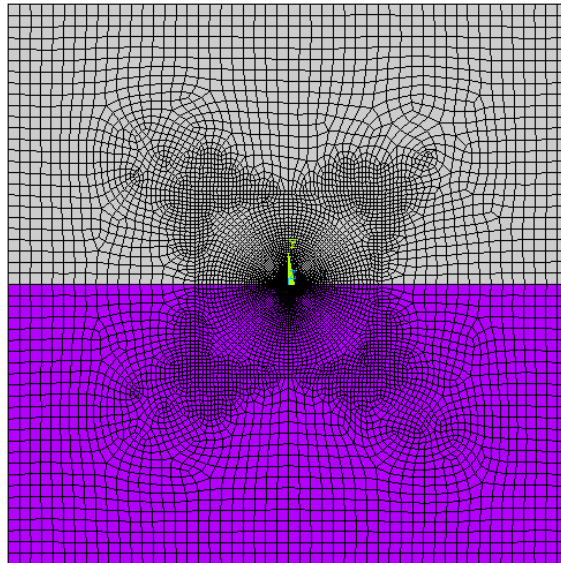
Tabulka 3: Parametry modelu, jeho geometrie je znázorněna na obrázcích 8.1 a 8.3.

Úhly  $\omega_1$  a  $\omega_2$  charakterizují rozevření vrubu. Jejich velikost je možno měnit v rozsahu  $\langle \frac{\pi}{2} \div \pi \rangle$ . Symboly I a II označují dva obecně odlišné příčné izotropní materiály, zadávané příslušnými parametry, tj.  $E_L^J$ ,  $E_T^J$ ,  $\nu_{LT}^J$ ,  $\nu_{TT'}^J$ ,  $G_{LT}^J$ ,  $J = \text{I, II}$ . Tyto jsou nakonec vypsány do souboru a slouží jako vstupní data do druhé části procedury. Detailní pohled na geometrii střední části modelu je znázorněn na obrázku 8.3. Zde se nachází kružnice s poloměrem  $R$ , tedy kružnice na které zjišťujeme pole posuvů a napětí uzlů jednotlivých prvků. Její poloměr je možno měnit v rozsahu  $(R_1 \div R_2)$ . Vytvořenou síť modelu ilustruje obrázek 8.2. Velikost prvků je vhodně zmenšována při jeho přibližování ke kořenu vrubu. Vstupní parametr ovlivňující výslednou síť modelu  $P_t$  je počet dělení obvodu čtvrtiny kružnice  $R$ . Tento je možno měnit. Bylo třeba vytvořit síť mezi poloměry  $R_1$  a  $R_2$  takovým způsobem, aby pro různé hodnoty  $R$  byla co nejvíce stejná. Jako vhodný přístup se ukázalo dělení na prvky, které se svým tvarem limitně blížily tvaru čtverce. Nejprve byl testován způsob dělení na základě naprogramování aritmetické posloupnosti, tento se ovšem zřejmě kvůli zaokrouhlovací chybě neosvědčil a byl nahrazen dělením na základě naprogramování cyklu. Obecně platí, že použitím jemnější sítě se zvyšuje přesnost výsledku, ale na úkor delšího výpočetního času. Jako ideální počet prvků na čtvrtkružnici uvádí Hrstka  $P_t = 45$ , [11]. Tento parametr je v této práci testován. Jako prvek můžeme volit rovinný lineární PLANE182 nebo kvadratický PLANE183, vliv na výsledek je v následujícím zkoumán. Dále je na výběr, zdali bude výpočet proveden pro stav rovinné deformace nebo rovinné napjatosti. Výchozím nastavením je rovinná deformace. Okrajové podmínky pro model jsou znázorněny na obrázku 8.6. Velikost zatížení  $\sigma_p$  můžeme libovolně měnit, výchozí hodnota byla nastavena na  $\sigma_p = 50\text{MPa}$ . V

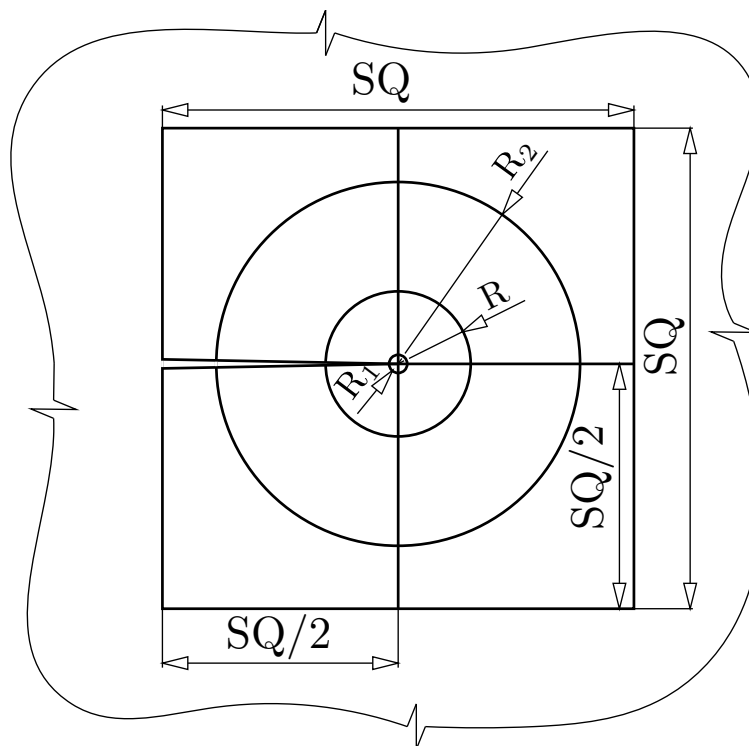
pravé části modelu je zamezeno posuvu v ose  $x$  a v jednom bodě, který odpovídá bimateriálovému rozhraní, je navíc zamezen posuv v ose  $y$ . Jedná se o mód zatěžování I, který je z hlediska posuzování tělesa s trhlinou považován za nejnebezpečnější [34].



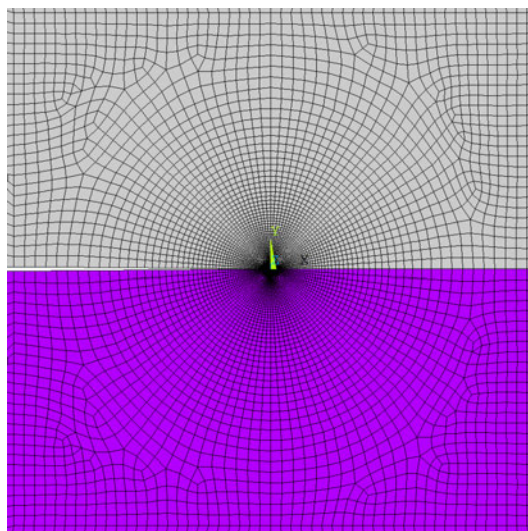
Obrázek 8.1: Geometrie modelového tělesa, indexy I a II označují různé materiály. Symboly  $L_I$  a  $L_{II}$  značí longitudinální směry materiálů.



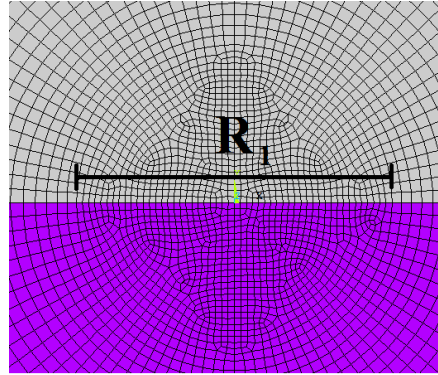
Obrázek 8.2: Modelové těleso s vytvořenou sítí v softwaru ANSYS. Odlišné barvy značí odlišné transverzálně ortotropní materiály.



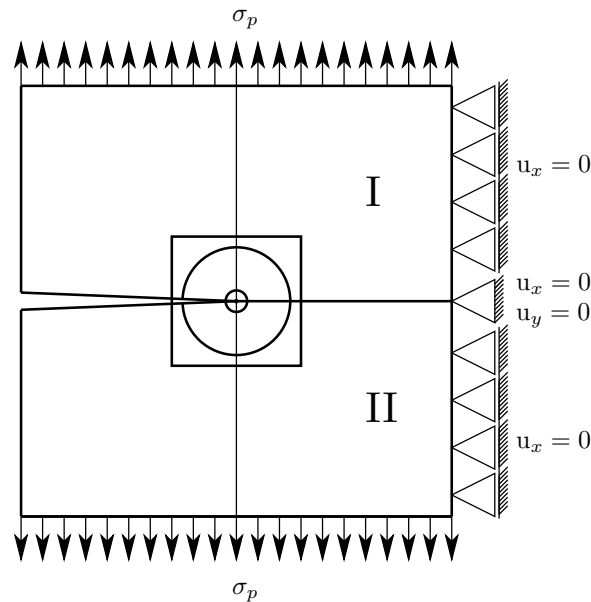
Obrázek 8.3: Detail části modelového tělesa. Kružnice s poloměrem  $R_1$  v blízkosti kořene vrubu, kružnice s poloměrem  $R$  značí integrační cestu a kružnice s poloměrem  $R_2$  ohraničující vnitřní oblast modelu.



Obrázek 8.4: Detailní zobrazení prvků ve vnitřní oblasti modelu.



Obrázek 8.5: Zobrazení oblasti v těsné blízkosti kořene trhliny.



Obrázek 8.6: Zatížení a vazby vzorku.

Napišme znovu vztah (6.18) pro určení ZSIN

$$H = \frac{\psi^M}{\psi} = \frac{\int_{-\omega_2}^{\omega_1} r^{-\delta} \left[ (\mathbf{u}^M)^T \hat{\boldsymbol{\lambda}}(\theta) - r \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \mathbf{t}^M \right] d\theta}{\int_{-\omega_2}^{\omega_1} \left( \boldsymbol{\eta}^T(\theta) \hat{\boldsymbol{\lambda}}'(\theta) - \hat{\boldsymbol{\eta}}^T(\theta) \boldsymbol{\lambda}'(\theta) \right) d\theta}.$$

Ve vztahu vystupující parametr  $r$  je integrační poloměr, tedy vzdálenost od kořene vrubu, kde zjišťujeme pole posuvů a napětí jednotlivých prvků. V případě konečnoprvkového modelu jej označujeme  $R$ . Po provedení výpočtu zjistíme zmíněné hodnoty v postprocesoru ANSYS na základě příkazu \*GET. Výstupem výpočtu jsou tedy dva soubory obsahující tyto charakteristiky  $u_x^J$ ,  $u_y^J$ ,  $\sigma_{xx}^J$ ,  $\sigma_{yy}^J$ ,  $\tau_{xy}^J$ , materiálů  $J = \text{I, II}$ , seřazené v závislosti na vzrůstajícím úhlu  $\theta$  a konstantním poloměru  $R$ . Tyto slouží jako vstupní data pro druhou část výpočtu.

Materiál	$E_L$ [GPa]	$E_T$ [GPa]	$\nu_{LT}$ [-]	$\nu_{TT'}$ [-]	$G_{LT}$ [GPa]
M <sub>I</sub>	100	40	0,30	0,30	5
M <sub>II</sub>	150	50	0,25	0,20	10
M <sub>III</sub>	175	80	0,25	0,22	12
M <sub>IV</sub>	200	85	0,30	0,15	14

Tabulka 4: Materiálové charakteristiky příčně izotropních materiálů M<sub>I</sub>, M<sub>II</sub>, M<sub>III</sub>, M<sub>IV</sub>.

## 8.2. Určení ZSIN $H$ za pomoci $\psi$ -integrálu pro případ trhliny na rozhraní

Druhá část algoritmu je realizována pomocí programu napsaném v jazyce FORTRAN. Vstupní parametry do této procedury jsou materiálové charakteristiky a hodnoty posuvů a napětí na zvoleném poloměru  $R$ , doplněné o hodnotu dělení kružnice  $R$ . Na základě matematického aparátu uvedeného v předchozích kapitolách program určí potřebné parametry, numericky zintegruje vstupní hodnoty a vypočítá hodnoty ZSIN. Integrace je prováděna numericky Rombergovou metodou s chybou  $10^{-10}$ , kterou můžeme z numerického hlediska považovat za nulu. Příklad trhliny na bimateriálovém rozhraní je speciálním případem vrubu na bimateriálovém rozhraní. Pro úhly  $\omega_1$  a  $\omega_2$  charakterizující geometrii modelu platí

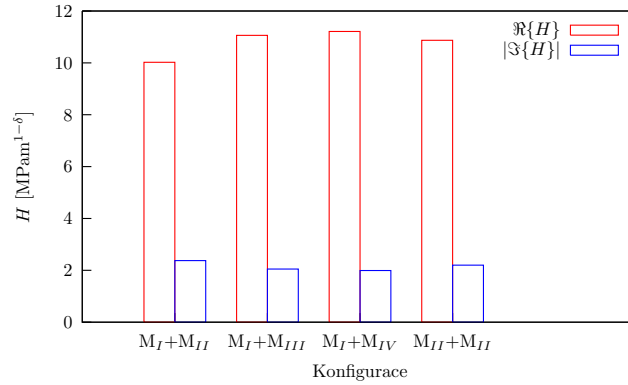
$$\omega_1 = \pi, \quad \omega_2 = -\pi.$$

### 8.2.1. Výpočet ZSIN

Uvažujme 4 různé transversálně ortotropní materiály, jak ukazuje tabulka 4, jejichž materiálové charakteristiky jsou shodné jako v případě určování VHES. Výpočet byl proveden pro hodnoty ležící na integračním poloměru o velikosti  $R = 15\text{mm}$ , při parametru dělení  $P_t = 25$  a pro případ rovinné deformace. Prvkem byl zvolen kvadratický PLANE183. Následující tabulka shrnuje vypočtené, komplexně sdružené ZSIN pro konkrétní bimateriálové konfigurace. Výsledné hodnoty jsou graficky znázorněny v histogramu, kde je možno graficky porovnat velikosti jejich reálných a imaginárních částí.

mat. kombinace I + II	$H$ [MPa <sup>1-<math>\delta</math></sup> ]	$\bar{H}$ [MPa <sup>1-<math>\bar{\delta}</math></sup> ]
M <sub>I</sub> + M <sub>II</sub>	10,822226 – 2,3747615i	10,822226 + 2,3747615i
M <sub>I</sub> + M <sub>III</sub>	11,061130 – 2,0503540i	11,061130 + 2,0503540i
M <sub>I</sub> + M <sub>IV</sub>	11,210218 – 1,9913405i	11,210218 + 1,9913405i
M <sub>II</sub> + M <sub>II</sub>	10,871021 – 2,2005274i	10,871021 + 2,2005274i

Tabulka 5: Vypočtené hodnoty komplexně sdružených ZSIN  $H$  a  $\bar{H}$  pro uvedené bimateriálové konfigurace.

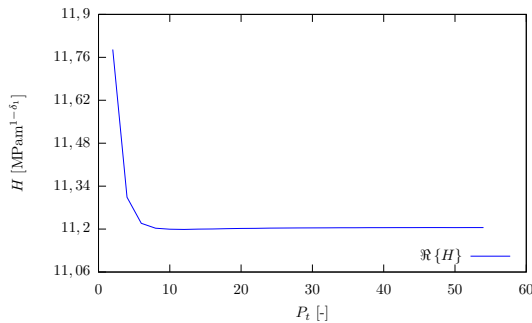


Obrázek 8.7: Porovnání reálné a imaginární části ZSIN pro různé kombinace materiálů.

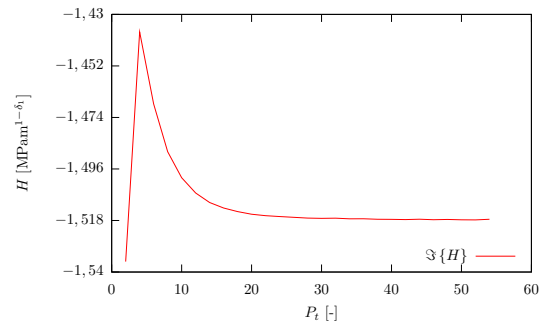
### 8.2.2. Určení optimálního počtu prvků na integrační cestě

Důležitým parametrem ovlivňující přesnost a rychlost výpočtu ZSIN  $H$  pomocí  $\psi$ -integrálu s hodnotami získávanými z MKP je počet prvků na integrační cestě. V případě modelového objektu znázorněného na obrázku 8.1 resp. 8.3 je integrační cestou kružnice s poloměrem  $R$  a parametrem ovlivňující počet prvků je počet dělení čtvrtinové části kružnice  $P_t$ . Byl proveden test pro zjištění optimálního dělení integrační cesty  $R$ . Závislost reálné  $\Re\{H\}$  a imaginární části  $\Im\{H\}$  ZSIN  $H$  materiálové konfigurace  $M_{III} + M_{IV}$  je vykreslena v grafech 8.8a a 8.8b. Hledáme takovou mezní hodnotu  $P_{tM}$ , jejíž zvyšování nemá na hodnoty  $\Re\{H\}$  a  $\Im\{H\}$  podstatný vliv. Jeho zvyšováním dochází pouze k prodlužování výpočtového času. Jako optimální parametr dělení integrační cesty modelového tělesa se pro danou konfiguraci ukázala být hodnota

$$P_{tM} = 24.$$



(a) Průběh reálné části ZSIN  $\Re\{H\}$  na  $P_t$



(b) Průběh imaginární části ZSIN  $\Im\{H\}$  na  $P_t$

Obrázek 8.8: Vykreslení závislosti reálné a imaginární části ZSIN  $H$  na parametru  $P_t$ , tedy počtu dělení čtvrtiny integrační cesty. Zvolené materiály  $M_{III} + M_{IV}$ , integrační poloměr  $R = 3\text{mm}$ , rovinná deformace, typ prvku PLANE183.

### 8.2.3. Určení optimální integrační cesty

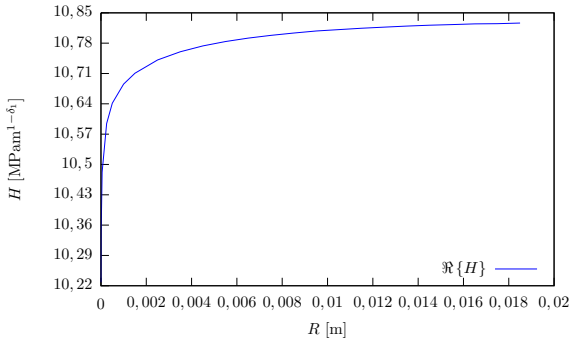
V této podsekcí je vyšetřena závislost velikosti ZSIN  $H$  na velikosti poloměru  $R$  kružnice po které je prováděna numerická integrace. Modelový objekt umožňuje jeho nastavení v rozsahu

(0.001 ÷ 20) mm. Byla testována závislost pro tři různé materiálové konfigurace, tj.  $M_I + M_{II}$ ,  $M_I + M_{III}$  a  $M_{IV} + M_I$ . Počet dělení na čtvrtkružnici byl zvolen  $P_t = 20$ . Závislosti  $\Re\{H\}$  a  $\Im\{H\}$  pro zmíněné konfigurace jsou vyneseny do grafů 8.9, 8.10 a 8.11. Z vykreslených závislostí je patrné, že existuje taková mezní hodnota integračního poloměru  $R_m$ , pod kterou dochází k náhlým změnám parametrů  $\Re\{H\}$  a  $\Im\{H\}$ . ZSIN stanovený na integrační kružnici s poloměrem menším nežli je  $R_m$  nelze považovat za reliabilní. Ze závislostí usuzujeme, že

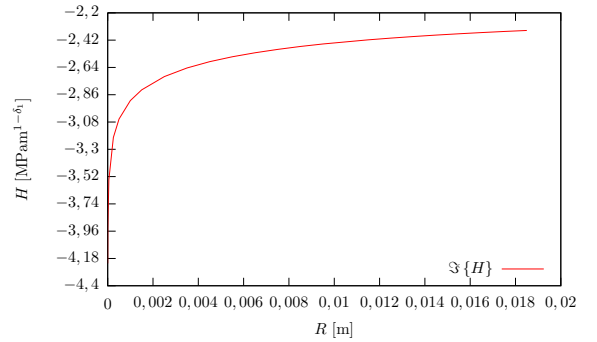
$$R_m = 1\text{mm}.$$

Z vykreslených výsledků je možno pozorovat, že dochází k jisté konvergenci reálné a imaginární hodnoty ZSIN se zvyšujícím se poloměrem integrační kružnice, což je v souladu s teorií. Dále je možno podotknout, že reálná část  $\Re\{H\}$  konverguje rychleji nežli část imaginární  $\Im\{H\}$ . Pro zjištění ZSIN  $H$  tedy volíme integrační poloměr ve větší vzdálenosti od singularity, v případě uvedeného modelového tělesa to může být interval

$$R_{\text{opt}} = (15 - 20) \text{ mm}$$

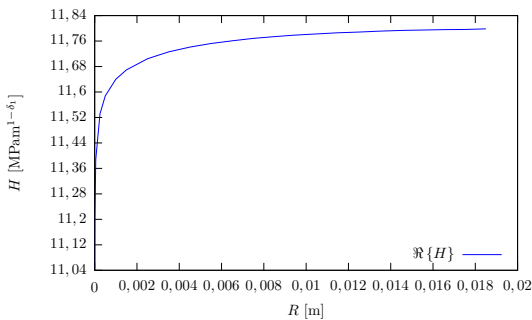


(a) Závislost  $\Re\{H\}$  na  $R$

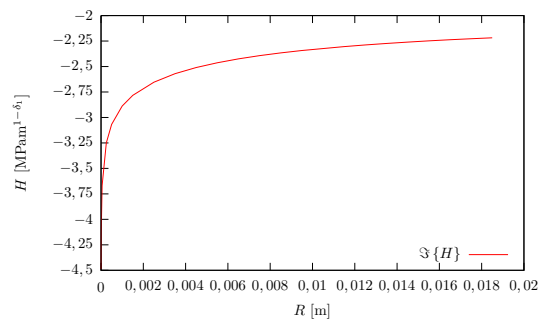


(b) Závislost  $\Im\{H\}$  na  $R$

Obrázek 8.9: Vykreslení průběhu reálné a imaginární části ZSIN  $H$  na poloměru integrační cesty  $R$ , materiálová konfigurace  $M_I + M_{II}$ , použité prvky PLANE183, rovinná deformace

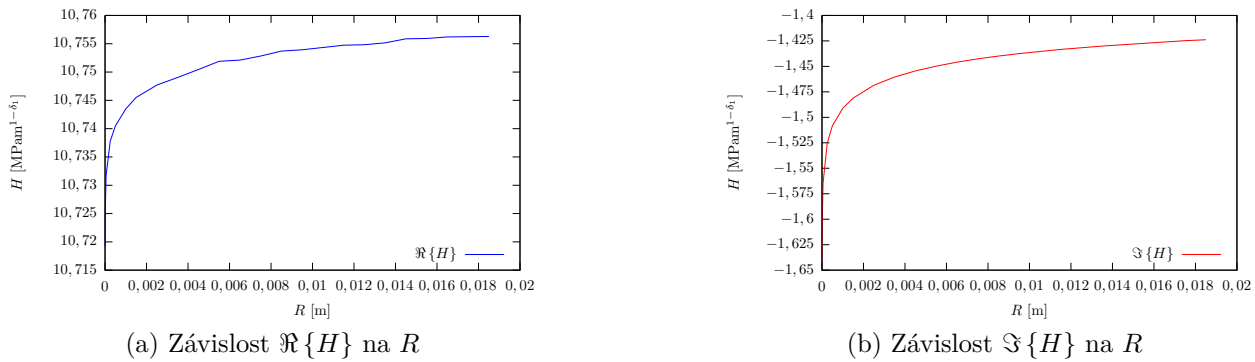


(a) Závislost  $\Re\{H\}$  na  $R$



(b) Závislost  $\Im\{H\}$  na  $R$

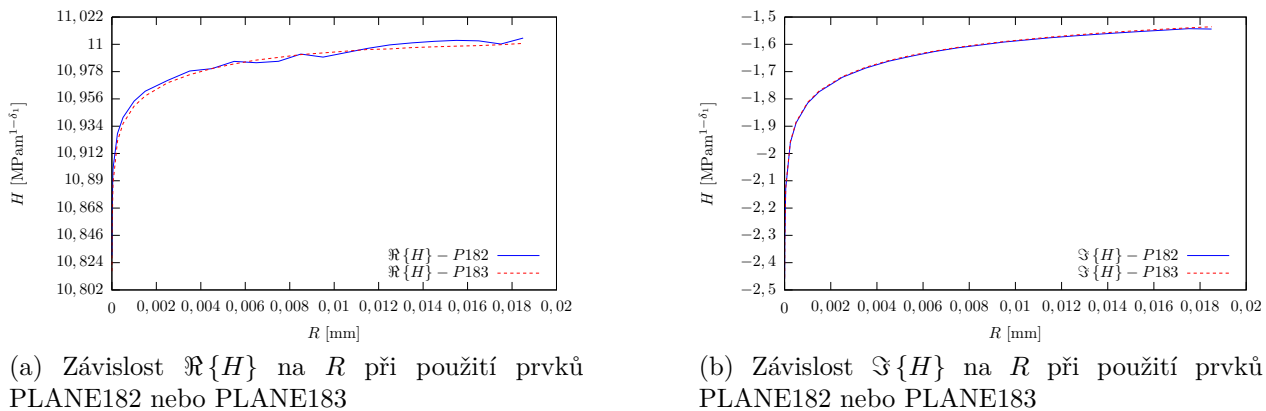
Obrázek 8.10: Vykreslení průběhu reálné a imaginární části ZSIN  $H$  na poloměru integrační cesty  $R$ , materiálová konfigurace  $M_I + M_{III}$ , použité prvky PLANE183, rovinná deformace.



Obrázek 8.11: Vykreslení průběhu reálné a imaginární části ZIN  $H$  na poloměru integrační cesty  $R$ , materiálová konfigurace  $M_{VI} + M_I$ , použité prvky PLANE183, rovinná deformace.

#### 8.2.4. Určení optimálního typu prvku

Při výpočtu vstupních hodnot pomocí uvažovaného modelu, nutných k určení ZIN  $H$ , je možno vytvořit síť různými prvky. Je možno použít lineární PLANE182 nebo kvadratický PLANE183. Při použití kvadratického prvku je potřeba delší výpočetní čas. Například při určování závislosti ZIN  $H$  na integračním poloměru, jako v případě podsektce 8.2.3 při 23 iteracích, použitím lineárního prvku výpočetní čas činil 7min 45s. Použitím kvadratického prvku bylo třeba 12min 25s. Vliv zvoleného prvku na přesnost výpočtu  $\Re\{H\}$  a  $\Im\{H\}$  materiálové konfigurace  $M_{III} + M_{III}$  je znázorněn v grafech 8.12. Z grafů je možno pozorovat, že použitím kvadratických prvků dostáváme hladší křivku závislosti reálné části ZIN  $\Re\{H\}$  na  $R$ . Jak lze pozorovat z grafu 8.12b, průběh imaginární části  $\Im\{H\}$  na volbě prvku nezávisí. Přestože se hodnoty ZIN  $H$  získané použitím odlišných prvků od sebe ovšem výrazně neliší, volíme vyšší přesnost kvadratického prvku na úkor rychlejšího výpočtu. Optimálním prvkem tvořícím síť je tedy kvadratický PLANE183.

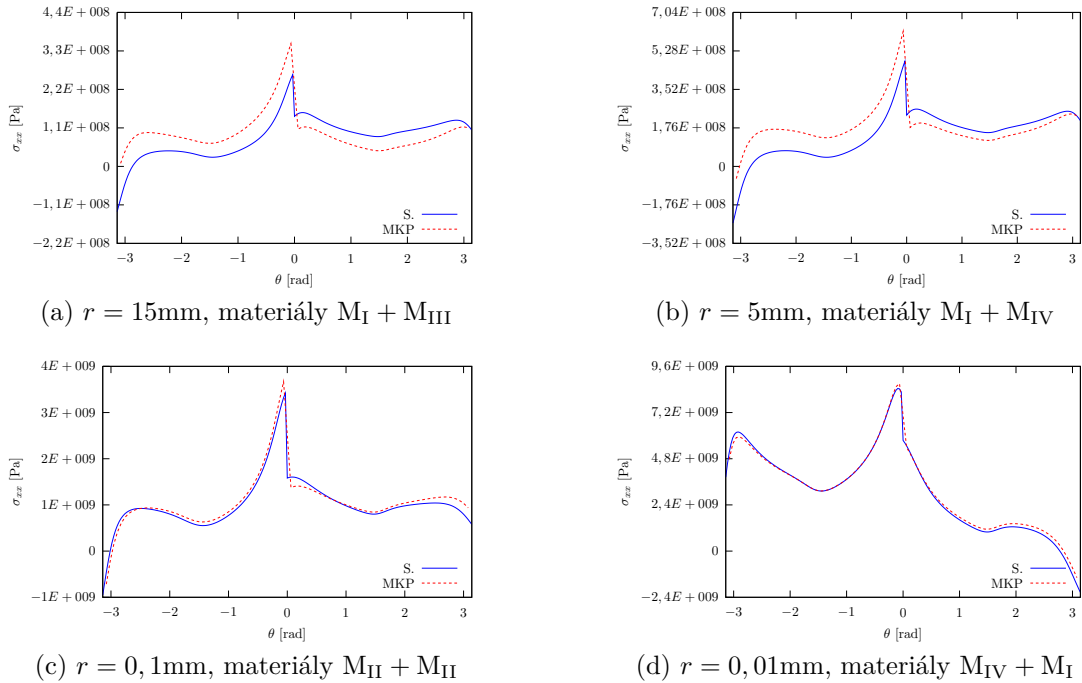


Obrázek 8.12: Vykreslení průběhu reálné a imaginární části ZIN  $H$  na poloměru integrační cesty  $R$  při použití různých prvků, materiálová konfigurace  $M_{III} + M_{III}$ , rovinná deformace

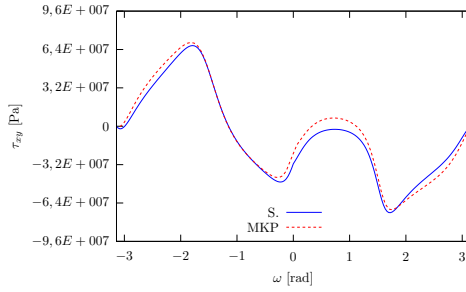
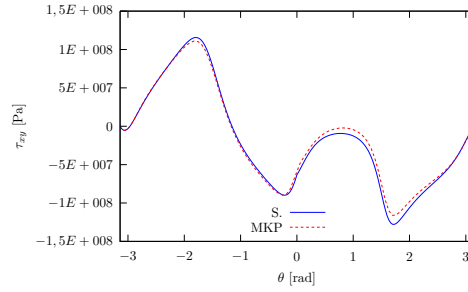
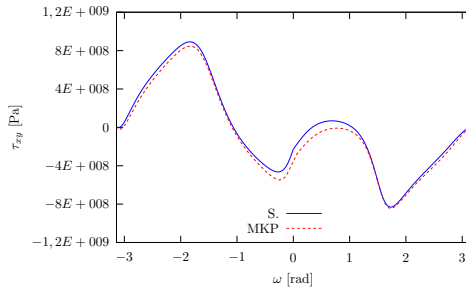
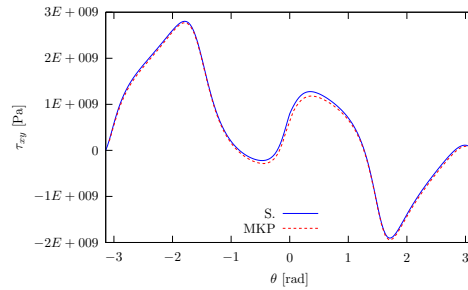


### 8.3. Průběhy napětí

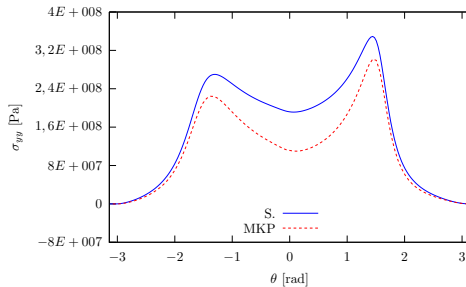
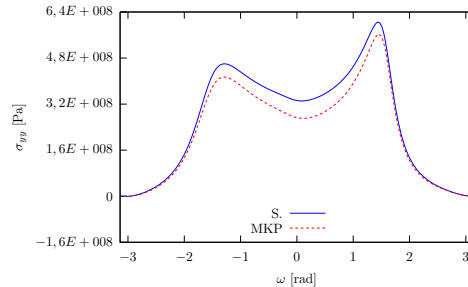
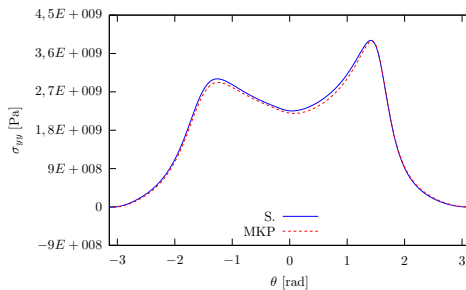
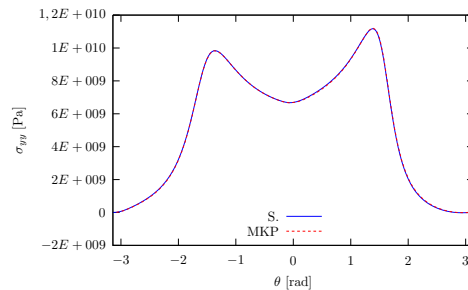
Uvažujme konfiguraci modelového tělesa a okrajové podmínky znázorněné na obrázcích 8.1 a 8.6. Předpokládejme případ tělesa s trhlinou na bimateriálovém rozhraní charakterizované úhly  $\omega_1 = \pi$ ,  $\omega_2 = -\pi$ . Uvažujme tyto bimateriálové konfigurace:  $M_I + M_{III}$ ,  $M_I + M_{IV}$ ,  $M_{II} + M_{II}$  a  $M_{IV} + M_I$  a případ rovinné deformace. Nyní srovnajme průběhy složek napětí  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$  a  $\sigma_{yy}$  získané dvěma odlišnými způsoby. Prvním způsobem je určení složek napětí analyticky na základě singulárního řešení pro první člen Williamsova asymptotického rozvoje za pomoci vztahů 6.9 a 5.15. Druhým způsobem je výpočet numericky za pomoci MKP, který v sobě zahrnuje složky napětí odpovídající vyšším členům Williamsova rozvoje, viz rovnice (4.2). Srovnání průběhů složek napětí  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$  a  $\sigma_{yy}$  na úhlu  $\theta$  je na určité kružnici  $r$  vykresleno v grafech 8.13, 8.14 a 8.15. Výpočty jsou provedeny pro různé vzdálenosti od singularity. Na závislostech můžeme pozorovat, že při vzrůstající vzdálenosti od singularity se na výsledné složce napětí projevují vyšší měrou nesingulární členy Williamsova rozvoje. Singulární řešení tedy vykazuje vyšší přesnost v těsné blízkosti kořene vrubu, naopak MKP poskytuje spolehlivé hodnoty mimo oblast, kde dominuje singularita.



Obrázek 8.13: Srovnání  $\sigma_{xx}$  vykreslené v závislosti na úhlu  $\theta$  po kruhové cestě v různých vzdálenostech od singularity. Červeně je znázorněn průběh  $\sigma_{xx}$  získaný MKP, modře je znázorněn průběh  $\sigma_{xx}$  získaný analyticky za pomoci singulárního řešení.

(a)  $r = 15\text{mm}$ , materiály  $M_I + M_{III}$ (b)  $r = 5\text{mm}$ , materiály  $M_I + M_{IV}$ (c)  $r = 0,1\text{mm}$ , materiály  $M_{II} + M_{II}$ (d)  $r = 0,01\text{mm}$ , materiály  $M_{IV} + M_I$ 

Obrázek 8.14: Srovnání  $\tau_{xy}$  vykreslené v závislosti na úhlu  $\theta$  po kruhové cestě v různých vzdálenostech od singularity. Červeně je znázorněn průběh  $\tau_{xy}$  získaný MKP, modře je znázorněn průběh  $\tau_{xy}$  získaný analyticky za pomoci singulárního řešení.

(a)  $r = 15\text{mm}$ , materiály  $M_{IV} + M_I$ (b)  $r = 5\text{mm}$ , materiály  $M_{IV} + M_I$ (c)  $r = 0,1\text{mm}$ , materiály  $M_{II} + M_{II}$ (d)  $r = 0,01\text{mm}$ , materiály  $M_{IV} + M_I$ 

Obrázek 8.15: Srovnání  $\sigma_{yy}$  vykreslené v závislosti na úhlu  $\theta$  po kruhové cestě v různých vzdálenostech od singularity. Červeně je znázorněn průběh  $\sigma_{yy}$  získaný MKP, modře je znázorněn průběh  $\sigma_{yy}$  získaný analyticky za pomoci singulárního řešení.

## 9. Závěr

Cílem předkládané práce byla aplikace teorie lomové mechaniky na konfiguraci ostrého vrubu a trhliny na rozhraní dvou ortotropních materiálů, analytický popis napětí v okolí ostrého bimateriálového vrubu a následné stanovení zobecněných součinitelů intenzity napětí ostrého bimateriálového vrubu pomocí analytických metod v kombinaci s MKP. Nejdříve bylo třeba seznámit se s problematikou anizotropních materiálů, konkrétně s ortotropním a příčně izotropním materiálovým modelem, které svým chováním mohou zastupovat kompozitní materiály s vlákny. Dále byly nastudovány základní principy lineární elastické lomové mechaniky a pomocí součinitele intenzity napětí uvedeno kritérium pro posouzení stability trhliny. Následoval popis obecného koncentrátoru napětí, což je geometrická a materiálová nespojitost, v jejímž okolí dochází ke koncentraci napětí. Principy LELM byly aplikovány na speciální případ koncentrátoru – bimateriálový vrub a podmínka stability trhliny zobecněna na těleso s obecným koncentrátorem. V rámci řešební části bylo dále pojednáno o elegantní metodě řešení anizotropní pružnosti zvané Lechnického-Eshelbyho-Strohův formalismus, která umožňuje efektivně popsat vlastnosti anizotropního materiálu za pomoci vlastních čísel. LES formalismus je vhodným nástrojem pro určení vlastních hodnot exponentů singularity. V další kapitole byl podrobně vysvětlen princip  $\psi$ -integrálu, na integrační křivce nezávislého integrálu, vycházejícího z Bettiho principu. Koncept  $\psi$ -integrálu slouží v kombinaci s metodou konečných prvků jako mocný aparát k určení zobecněného součinitele intenzity napětí  $H$ .

Výpočtová část se zaměřila na speciální případ bimateriálového vrubu, tedy na trhlínu na bimateriálovém rozhraní. Pro různé materiálové konfigurace byly určeny komplexně sdružené vlastní hodnoty exponentů singularity  $\delta$  a  $\bar{\delta}$ . Reálná část VHES  $\delta_R$  v případě trhliny na bimateriálovém rozhraní je pro všechny materiálové konfigurace shodná, kdežto její imaginární část  $\varepsilon$  je odlišná. Ačkoli při posuzování singularity hraje dominantní roli reálná část  $\delta_R$ , její imaginární část  $\varepsilon$  není v určitých případech zanedbatelná. Vypočtené výsledky imaginární části VHES jsou znázorněny v histogramu v závěru kapitoly 7. Vysokých hodnot  $\varepsilon$  bylo dosaženo při použití dvou elastickými moduly podobných materiálů, které byly na sebe kolmo orientovány longitudiálními směry. Dále byly na základě problému vlastních hodnot určeny vlastní vektory, nutné jako jeden ze vstupních parametrů pro výpočet zobecněného součinitele intenzity napětí, pomocí metody  $\psi$ -integrálu. Jako další vstupní parametry byly vypočteny pomocné exponenty singularity (bez fyzikálního významu) a jim odpovídající pomocné vektory. V další kapitole výpočtové části bylo představeno vytvořené modelové těleso, které představuje zkušební těleso s vrubem na bimateriálovém rozhraní. Mód zatěžování byl uvažován jako I, rozevírací, který je z hlediska možnosti vzniku mezního stavu stability trhlín považován za nejnebezpečnější. Při nulovém úhlu rozevření vrubu modelového tělesa dostáváme těleso s trhlínou, na který aplikujeme výpočtový algoritmus  $\psi$ -integrálu. Výsledné zobecněné součinitele intenzity napětí  $H_k$ ,  $k = 1, 2$  jsou v tomto případě komplexně sdružené  $H_1 = H$ ,  $H_2 = \bar{H}$ . Při uvažování shodných materiálových parametrů jako při výpočtu VHES byl proveden výpočet ZSIN pro trhlínu na rozhraní pro 4 různé bimateriálové kombinace. Výsledné hodnoty ZSIN byly graficky zpracovány v histogramu, kde je možno porovnat velikosti jejich reálných a imaginárních částí. Maximální hodnoty reálné složky ZSIN dosahoval pro bimateriál  $M_I + M_{IV}$ , kdy se jedná o kombinaci s nejvíce odlišnými moduly pružnosti. Model byl podroben sérii testů. Prvním z nich bylo určení optimálního počtu prvků na integrační cestě, kterou je kružnice s poloměrem  $R$ . Výsledkem testování byl mezní parametr

dělení čtvrtinové části kružnice  $P_{tM} = 24$ , což po celé délce kružnice odpovídá 94 integračním bodům<sup>10</sup>. Vyšší zvyšování parametru dělení nepřineslo vyšší přesnost, pouze delší výpočetní čas.

Efektivita metody  $\psi$ -integrálu spočívá ve schopnosti určit ZSIN, tedy parametr popisující blízké okolí singularity, za pomoci hodnot posuvů a napětí získaných v dostatečné vzdálenosti od singularity. Metoda konečných prvků totiž v těsné blízkosti singularity při použití běžných prvků neposkytuje spolehlivé výsledky a singularity je nutné modelovat pomocí speciálních degenerovaných triangulárních prvků. Použití degenerovaných triangulárních prvků, ve výpočetním programu ANSYS příkazem KSCON, v případě vrubu a trhliny na bimateriálovém rozhraní není možné.

Následující část testování byla zaměřena na určení optimálního poloměru integrační kružnice  $R$ , na které budou zjišťována posuvy a napětí sloužící jako vstupní parametr pro stanovení ZSIN. Při testování různých bimateriálových konfigurací vyplynulo, že minimální velikost integrační kružnice je třeba stanovit na hodnotu  $R_m = 1\text{mm}$ . Počítáme-li hodnoty ZSIN na kružnici menší než na této mezní hodnotě, dostaneme nespolehlivé výsledky. Byl také stanoven interval hodnot poloměrů optimálních integračních kružnice  $R_{\text{opt}} = (15 - 20)\text{mm}$ , která zaručuje určitou konvergenci reálné a imaginární složky ZSIN  $H$ . Test volby optimálního prvku prokázal v podstatě předpokládaný výsledek. Na úkor delšího výpočetního času při použití kvadratického prvku dostáváme přesnější výsledek, resp. hladší průběh reálné složky ZSIN v závislosti na integračním poloměru  $R$ . Bylo zjištěno, že imaginární část ZSIN  $H$  na volbě prvku nezávisí.

V poslední části této práce jsme se věnovali srovnání průběhů složek tenzoru napětí  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$  a  $\sigma_{yy}$  v závislosti na souřadnici  $\theta$  získaných dvěma různými způsoby. Prvním způsobem je získání pole napětí na určité kružnici charakterizované poloměrem  $r$  přímo numerickou metodou konečných prvků. Druhým způsobem bylo určení složek napětí na základě vztahu pro výpočet napětí pomocí prvního singulárního členu asymptotického Williamsova rozvoje. Toto je podmíněno předchozím vypočtením ZSIN  $H$ . Výsledky byly zaneseny do grafů. Je možno pozorovat, že při relativně nízké vzdálenosti od singularity se singulární a MKP řešení téměř shoduje. Ve větší vzdálenosti jsou výsledky rozdílné. Toto je způsobeno tím, že MKP v sobě zahrnuje i vyšší členy Williamsova rozvoje a jím odpovídající složky napětí. Jednou z těchto složek je tzv. T-napětí, které má podstatný vliv na iniciaci a šíření trhliny. Proto pro přesnější posouzení napěťových stavů tělesa s trhlinou je nutné vyšší členy Williamsova rozvoje zahrnout.

<sup>10</sup>Dva integrační body, tj. uzly, ležící na bimateriálovém rozhraní neuvažujeme.

## 10. Literatura

- [1] ANDERSON, T.L. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. Second edition. Boca Raton: CRC Press, 1995. 669 s.
- [2] Boeing 787 Dreamliner. [online] *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Poslední aktualizace 23. února 2013, 06:10 UTC. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Boeing\\_787\\_Dreamliner&oldid=539852894](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Boeing_787_Dreamliner&oldid=539852894).
- [3] The Boeing 787 Dreamliner Designing an Aircraft for the Future. [online]. *Journal of young investigators*. Poslední aktualizace: srpen 2010. Dostupné z: <http://www.jyi.org/issue/the-boeing-787-dreamliner-designing-an-aircraft-for-the-future/>
- [4] BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. Praha: Academia, 2005. 799s.
- [5] BROBERG, K.B. *Cracks and Fracture*. San Diego: Academic press, 1999.
- [6] DESMORAT, R., LECKIE, F.A. Singularities in bi-materials: parametric study of an isotropic/anisotropic joint. *European journal of mechanics*. A/Solids, roč. 17, č. 1, 1998.
- [7] DRUCKMÜLLER, M. *Analýza v komplexním oboru*. Učební texty vysokých škol. Brno: Ediční středisko VUT Brno, 1986.
- [8] Euler's formula. [online] *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Poslední aktualizace 13. května 2013, 22:23 UTC. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's\\_formula#cite\\_note-2](http://en.wikipedia.org/wiki/Euler's_formula#cite_note-2).
- [9] General Electric GENx. [online] *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Poslední aktualizace 23. února 2013, 10:06 UTC. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=General\\_Electric\\_GENx&oldid=539623148](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=General_Electric_GENx&oldid=539623148).
- [10] General Electric GENx. [online] *GE Aviation*. Dostupné z: <http://www.geaviation.com/engines/commercial/genx/>
- [11] HRSTKA, M. *Popis rozložení napětí v okolí bimateriálového vrubu pomocí zobecněného faktoru intenzity napětí*. Diplomová práce. Brno: VUT, FSI, 2012. Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [12] HWU, C. *Anisotropic Elastic Plates*. New York: Springer, 2010.
- [13] JANÍČEK, P., et al. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. Učební texty vysokých škol. Brno : Akademické nakladatelství CERM, 2004.
- [14] KNÉSL, Z., KLUSÁK, J., NÁHLÍK, L. Crack initiation criteria for singular stress concentrations. Part I: Universal Assessment of Singular Stress Concentrations. *Engineering MECHANICS*, 2007, Sv. 14, č. 6, s.399-408.

- [15] KOPP, D. *Stanovení podmínek porušení bi-materiálových vrubů při kombinovaném módu zatížení*. Diplomová práce. Brno: VUR, FSI, 2011. 68 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Jan Klusák, Ph.D..
- [16] KOTOUL, M. *Odborná konzultace* (20.5.2011)
- [17] KREPL, O. *Popis rozložení napětí v blízkosti koncentrátoru napětí na bi-materiálovém rozhraní*. Bakalářská práce. Brno: VUT, FSI, 2011. Vedoucí bakalářské práce: Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [18] KLUSÁK, J., KNĚSL, Z., NÁHLÍK, L. Crack initiation criteria for singular stress concentrations. Part II: Stability of Sharp and Bi-Material Notches. *Engineering MECHANICS*, 2007, Sv. 14, č. 6, s.409-422.
- [19] KVASNICA, J. *Matematický aparát fyziky*. Praha: ACADEMIA, 2004.
- [20] McEVILY, A.J. *Metal Failures: Mechanisms, Analysis, Prevention*. New York: A Wiley-interscience publication, 2002. 336s.
- [21] Nabla-Operator. [online] *Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. Poslední aktualizace 28. ledna 2013, 16:45 UTC. Dostupné z: <http://de.wikipedia.org/wiki/Nabla-Operator>
- [22] ONDRÁČEK, E., et al. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II*. Učební texty vysokých škol. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006.
- [23] PADĚLEK, P., *Problematika komplexních potenciálů v izotropní rovinné pružnosti*. Bakalářská práce. Brno: VUT, FSI, 2010. Vedoucí bakalářské práce Ing. Tomáš Profant, Ph.D.
- [24] PROFANT, T., et al. An energetic criterion for a micro-crack of finite length initiated in orthotropic bi-material notches, *Engineering fracture mechanics*, 2012.
- [25] PETRUŠKA, J., *Tenkostěnné konstrukce*. [přednášky] FSI VUT, 2012.
- [26] REKTORYS, K. *Přehled užití matematiky I*. Praha: Prometheus, 2000. 720s.
- [27] SONG, C., TIN-LOI, F., GAO, W. A definition and evaluation procedure of generalized stress intensity factors at cracks and multi-material wedges. *Engineering Fracture Mechanics*, Květen 2010, č. 77.
- [28] SUN, C. T., JIN. Z.-H. *Fracture mechanics*. Waltham: Academic Press, 2012. 311s.
- [29] SUO, Z., *Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Anisotropic Media*. Proceedings of the Royal Society of London: A, Mathematical and Physical Sciences, roč. 427, č. 1873, s. 331-35.
- [30] SVOBODA, M. *Problém trhliny v blízkosti bimateriálového rozhraní*. Diplomová práce. Brno: VUT, FSI, 2012. Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

- [31] ŠEVEČEK, O. *Solution of general stress concentrators in anisotropic media by combination of FEM and complex potential theory*. Disertační práce. Brno: VUT, FSI, 2009. Vedoucí disertační práce prof. RNDr. Michal Kotoul, DrSc.
- [32] POKLUDA, Jaroslav, František KROUPA a Ladislav OBDRŽÁLEK. *Mechanické vlastnosti a struktura pevných látek: kovy, keramika, plasty*. Vyd. 1. Brno: PC-DIR, 1994, 385 s. Učební texty vysokých škol VUT v Brně
- [33] TING, T.C.T. *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications*. New York: Oxford university press, 1996. 570s.
- [34] VLK, M., FLORIAN, Z. *Mezní stavy a spolehlivost*. Učební texty vysokých škol. Brno: VUT, FSI, 2007.
- [35] VLK, M. *Mezní stavy a spolehlivost*. Učební texty vysokých škol. Brno: Nakladatelství VUT v Brně, 1991.
- [36] VRBKA, J. *Mechanika kompozitů*. Učební texty vysokých škol. Brno: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, FSI VUT, 2008. 94 s.
- [37] WILLIAMS M.L. On the stress distribution at the base of stationary crack. *Journal of applied Mechanics*. 1957. Sv.24. str. 109.

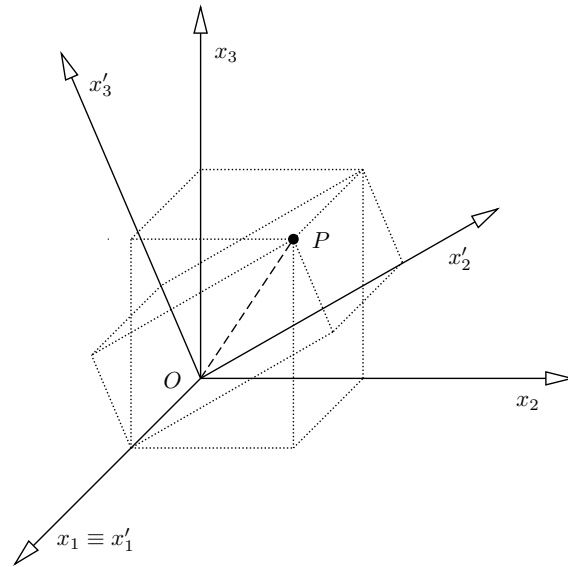
## 11. Seznam použitých symbolů

I,II,III,IV		Indexy pro módy zatěžování $K_J$ / indexy pro materiály $M_i$
$\mathbb{A}$		Matice vlastních vektorů $\mathbf{a}$
$A_m$		Koeficienty členů vyšších řádů Williamsova rozvoje
$\mathbf{a}$		Vlastní vektor v rámci LES formalismu
$A$	[mm]	Délkový parametr modelu
$\mathbf{b}$		Komplexní vektor v rámci LES formalismu
$\mathbb{B}$		Matice komplexních vektorů $\mathbf{b}$ / matice pro popis ortotropních materiálů
$B$	[mm]	Délkový parametr modelu
$\beta$	[–]	Dundursův parametr
$C_{ijkl}$	[Pa]	Tenzor elastických koeficientů
$C_{\alpha\beta}$	[Pa]	Tenzor elastických koeficientů ve zúženém tvaru
$\mathbb{C}$	[Pa]	Matice tuhosti
$\Delta$		Laplaceův operátor
$\delta$	[–]	Vlastní hodnota exponentu singularity
$\delta - 1$	[–]	Exponent singularity
$\delta_R$	[–]	Reálná část exponentu singularity
$\delta_{ij}$	[–]	Kroneckerovo delta
$E_\alpha$	[Pa]	Youngův modul pružnosti v tahu
$\phi$		Funkce napětí
$f_i$	[Nm <sup>-3</sup> ]	Objemová síla
$\varepsilon_{ij}$	[–]	Tenzor přetvoření
$\varepsilon_\beta$	[–]	Tenzor přetvoření ve zkráceném tvaru
$\varepsilon$	[–]	Oscilační index
$\boldsymbol{\eta}(\theta)$		Funkce závisující na úhlu $\theta$
$G_\alpha$	[Pa]	Modul pružnosti ve smyku
$H_k$	[MPa <sup>1-\delta</sup> ]	Zobecněný součinitel intenzity napětí
$i$		Imaginární jednotka
$\Im \{ \}$		Imaginární část komplexního čísla
$K_J$	[MPa <sup>-1/2</sup> ]	Součinitel intenzity napětí
$K_C$	[MPa <sup>-1/2</sup> ]	Kritická hodnota součinitele intenzity napětí, lomová houževnatost
$\mathbb{K}$		Matice soustavy rovnic pro určení $\delta$
$\mathbb{L}$		Matice vlastních čísel pro ortotropní materiály
$L, T, T'$		Index lonigudinálního a transverzálních směrů
$\lambda$	[–]	Lamého konstanta / bezrozměrný parametr používaný při popisu ortotropního materiálu
$\boldsymbol{\lambda}(\theta)$		Funkce závisující na úhlu $\theta$
$m$		Parametr používaný při popisu ortotropního materiálu
$\mu$	[–]	Druhá Lamého konstanta
$\mu_k$	[–]	Vlastní čísla materiálu
$n$		Parametr používaný při popisu ortotropního materiálu
$\nu_{\alpha\beta}$	[–]	Poissonovo číslo v daných směrech
$P_t$	[–]	Parametr pro dělení čtvrtinové části integrační kružnice



$\psi$		$\psi$ -integrál
$\mathbb{Q}$		Matice materiálových charakteristik v rámci LES formalismu
$r$	[m]	Polární souřadnice
$\Re \{ \}$		Reálná část komplexního čísla
$\mathbb{R}$		Matice materiálových charakteristik v rámci LES formalismu
$\rho$		Parametr používaný při popisu ortotropního materiálu
$SQ$	[mm]	Délkový parametr modelu
$S_{ijkl}$	[Pa]	Tenzor elastických modulů
$S_{\alpha\beta}$	[Pa]	Tenzor elastických modulů ve zúženém tvaru
$s_{\alpha\beta}$	[Pa]	Tenzor redukovaných elastických modulů
$\mathbb{S}$	[Pa]	Matice poddajnosti
$\sigma_{ij}$	[Pa]	Tenzor napětí
$\sigma_{\alpha}$	[Pa]	Tenzor napětí ve zkráceném tvaru
$\sigma_{\infty}$	[Pa]	Vnější zatížení
$\sigma_C$	[Pa]	Kritické zatížení
$\mathbb{T}$		Matice materiálových charakteristik v rámci LES formalismu
$\tau_{\alpha\beta}$	[Pa]	Smykové napětí
$\mathbf{t}_i$	[Pa]	Složky vektoru napětí
$\mathbf{T}$	[N]	Výsledný vektor napětí podél hranice
$\theta$	[rad]	Polární souřadnice
$u_i$	[m]	Složky vektoru posuvů
$\mathbf{v}$		Vlastní vektor
$W$	J/m <sup>3</sup>	Měrná energie napjatosti
$\mathbf{w}$		Vlastní vektor
$\omega_1, \omega_2$	[°]	Úhly rozevření vrubu
RN		Rovinná napjatost
RD		Rovinná deformace
LELM		Lineárně elastická lomová mechanika
VHES		Vlastní hodnota exponentu singularity
ZSIN		Zobecněný součinitel intenzity napětí

## A. Definice a základní vlastnosti kartézských tenzorů



Obrázek A.1: Příklad ortogonální transformace souřadnic

### A.1. Ortogonální transformace souřadnic

Uvažujme trojrozměrný euklidovský prostor. V něm jsou dány dvě soustavy přímočarých pravoúhlých souřadnicových os se společným počátkem  $O$  jako na obrázku A.1. Souřadnice libovolného bodu  $P$  označme  $x_1, x_2, x_3$  v soustavě jedné, nečárkované, a  $x'_1, x'_2, x'_3$ , v soustavě druhé, čárkované. Chceme-li například vyjádřit, že při transformaci jsou souřadnice čárkované funkcemi souřadnic nečárkovaných, můžeme podle [4] psát:

$$x'_j = x'_j(x_1, x_2, x_3) \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.1})$$

Dále nebudeme vypisovat všechny tři souřadnice, ale budeme psát vždy pouze  $x_i$ , popř.  $x'_j$  tj.

$$x'_j = x'_j(x_i) \quad j = 1, 2, 3.$$

Jsou-li obě soustavy souřadnic pravoúhlé a kartézské (jak předpokládáme), nazýváme příslušnou transformaci souřadnic *ortogonální*. Směrové kosiny úhlů, které svírá osa  $x'_i$  s nečárkovanými osami, označíme  $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}$ , tedy

$$a_{i1} \equiv \cos(\widehat{x'_i, x_1}) \quad a_{i2} \equiv \cos(\widehat{x'_i, x_2}) \quad a_{i3} \equiv \cos(\widehat{x'_i, x_3})$$

První index v  $a_{ij}$  se tedy vztahuje k čárkované a druhý k nečárkované soustavě souřadnic. Koeficienty  $a_{ij}$  se nazývají *směrovými kosiny transformace*. Transformaci (A.1) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{A.2})$$

pro inverzní transformaci platí

$$x_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} x'_i \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.3})$$

Ve vzorcích (A.2) a (A.3) sčítáme vždy podle indexu, který se na pravé straně vyskytuje dvakrát. Kvůli zjednodušení je možné zavést *Einsteinovo sumační pravidlo* [4]: sumace se nevyznačuje symbolem  $\sum$  a prostě si ji myslíme provedenou podle každého indexu, který se vyskytuje v jednom členu dvakrát. Po této úmluvě můžeme rovnice (A.2) a (A.3) psát

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (\text{A.4})$$

a

$$x_j = a_{ij} x'_i.$$

## A.2. Definice kartézských tenzorů

Mějme 2 vektory  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ . Vzájemným vynásobením jejich složek obdržíme 9 podvojných součinů  $A_i B_j$ . Ty se budou transformovat podle (A.1) následovně

$$A'_i = a_{ik} A_k, \quad B'_j = a_{jl} B_l,$$

takže dostáváme

$$A'_i B'_j = a_{ik} a_{jl} A_k B_l.$$

Vidíme, že čárkovaná veličina  $A'_i B'_j$  je lineární homogenní funkcí devíti nečárkovaných veličin  $A_k B_l$ . Všimněme si dále, že při transformaci je  $A_k B_l$  jedním celkem, tedy je stále ve formě součinu jedné složky vektoru  $\mathbf{A}$  a jedné složky vektoru  $\mathbf{B}$ . Podle tohoto chování podvojných součinů  $A_i B_j$  definujeme tenzor druhého řádu:

Devět veličin  $T_{ij}$ , které se při ortogonální transformaci souřadnic transformují podle zákona

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl},$$

nazýváme *složkami tenzoru druhého řádu* anebo prostě *tenzorem druhého řádu*; máme přitom ovšem na mysli soubor všech devíti veličin [4].

Obdobným způsobem definujeme tenzory vyšších řádů

$$T'_{\underbrace{i \dots l}_n} = \underbrace{a_{ir} \dots a_{lt}}_n T_{\underbrace{r \dots t}_n},$$

indexy  $r, \dots, t$  jsou zde sčítací. Např. v pružnosti a pevnosti důležité  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  a  $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , které se transformují podle pravidla

$$T'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kr} a_{ls} T_{mnrs}.$$

Pro inverzní transformaci platí

$$T_{mnrs} = a_{im} a_{jn} a_{kr} a_{ls} T'_{ijkl}.$$

Tenzor čtvrtého řádu má obecně v trojrozměrném prostoru  $3^4 = 81$  nezávislých složek.

## B. Airyho funkce napětí

### B.1. Odvození Airyho funkce napětí

Nejdříve uveďme rovnice rovnováhy [4, 12], které bez uvažování objemových sil můžeme zapsat ve tvaru

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (\text{B.1})$$

kde  $\sigma_{ij}$  jsou složky tenzoru napětí a čárka v indexu značí derivaci podle souřadnice, která ji následuje. Dále uvažujme konstitutivní vztahy pro izotropní materiál

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [\sigma_{ij} - \nu (\sigma_{kk} \delta_{ij} - \sigma_{ij})], \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (\text{B.2})$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti,  $\nu$  je poissonovo číslo a  $\delta_{ij}$  je *Kroneckerovo delta* [4] definované vztahem

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{pro } i \neq j \\ 1, & \text{pro } i = j \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Pro zjednodušení uvažujme rovinnou úlohu pružnosti. Napišme *rovnici kompatibility*, kterou můžeme chápat jako podmínku, kterou musí splňovat složky přetvoření, aby z nich bylo možné odvodit spojitě funkce posuvu [25]. Zde je kvůli názornosti uvedena v konkrétním tvaru:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}. \quad (\text{B.4})$$

Potom ze vztahů (B.1), (B.2) a (B.4) plyne důležitá rovnice, známá jako *Levyho podmínka*

$$\Delta (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \quad (\text{B.5})$$

kde symbol  $\Delta$  značí *Laplaceův operátor* [4]

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

a operátor  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$  nazýváme *Hamiltonovým operátorem* neboli *operátorem nabra* [21]. Součet napětí  $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  z rovnice (B.5) je tedy harmonickou funkcí proměnných  $x, y$ . Rovnice rovnováhy (B.1) je možno splnit zavedením tzv. *Airyho funkce napětí*  $F(x, y)$  [5, 28, 35]

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (\text{B.6})$$

Z Levyho podmínky (B.5) tedy dostáváme podmínku

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \Delta^2 F = 0,$$

která říká, že  $F(x, y)$  je *biharmonická funkce*.

## B.2. Muschelišviliho komplexní potenciály

Muschelišvili dokázal [5], že jakoukoli biharmonickou funkci,  $F(x, y)$  lze vyjádřit pomocí dvou vhodných holomorfních funkcí komplexní proměnné  $\psi(z)$  a  $\chi(z)$ , také známých jako *Muschelišviliho komplexní potenciály*,

$$F(x, y) = \Re \{ \bar{z} \psi(z) + \chi(z) \} \quad (\text{B.7})$$

kde  $\Re$  značí reálnou část funkce komplexní proměnné a  $\bar{z}$  znamená číslo komplexně sdružené k číslu  $z$ . Úpravami Airyho funkce napětí (B.6) a rovnice (B.7) detailně uvedenými například v [28, 5] dostáváme pro napětí vztahy

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 [\psi'(z) + \overline{\psi'(z)}] = 4\Re \psi'(z),$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + i\tau_{xy} = 2 [\bar{z} \psi''(z) + \chi''(z)].$$

Pro složky posuvu platí

$$2G(u + iv) = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} \psi(z) - z \overline{\psi'(z)} - \overline{\chi'(z)}, \quad (\text{B.8})$$

kde symbol  $G$  značí modul pružnosti ve skmyku a  $k$  je konstanta definovaná Brobergem [5]

$$k^2 = \begin{cases} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, & \text{pro rovinnou deformaci} \\ \frac{1-\nu}{2}, & \text{pro rovinnou napjatost} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

kde  $\nu$  je Poissonovo číslo. Účelem pro její zavedení je možnost v jedné rovnici (B.8) vyjádřit jak případ rovinné deformace, tak rovinné napjatosti. S tzv. *Kolosovovou konstantou* definovanou

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{pro RD} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{pro RN} \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

je provázána vztahem

$$\kappa = \frac{1 + k^2}{1 - k^2}.$$

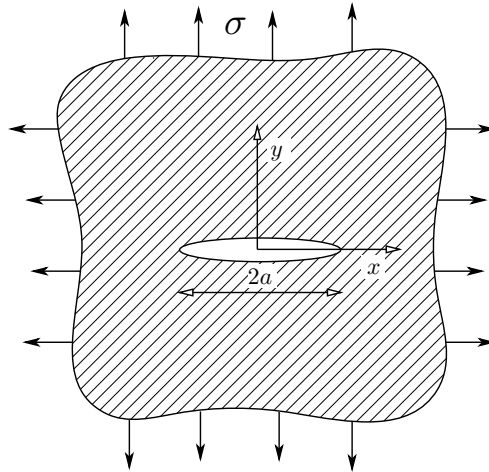
Vztah (B.8) potom píšeme ve tvaru

$$2G(u + iv) = \kappa \psi(z) - z \overline{\psi'(z)} - \overline{\chi'(z)}.$$

## B.3. Westergaardovo řešení

Westergaard dokázal, že v řadě případů lze vystačit při řešení rovinné úlohy s jedinou holomorfní funkcí komplexní proměnné [1], svázanou s Airyho funkcí napětí vztahem

$$F(x, y) = \Re \{ \bar{\bar{Z}}(z) \} + y \Im \{ \bar{Z}(z) \},$$



Obrázek B.1: Trhlina v nekonečně velké desce zatížené dvojosým tahem

kde

$$\bar{Z}(z) = \frac{d\bar{\bar{Z}}(z)}{dz}, \quad Z(z) = \frac{d\bar{Z}}{dz}.$$

Westergaardovo řešení je zvláštním případem Muschelišviliho řešení [35] pro

$$\psi(z) = \frac{1}{2}Z(z), \quad \chi(z) = -\frac{1}{2}Z'(z).$$

Z rovnic (B.6) pro složky napětí plyne

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \Re\{Z(z)\} - y\Im\{Z'(z)\}, \\ \sigma_{yy} &= \Re\{Z(z)\} + y\Im\{Z'(z)\}, \\ \tau_{xy} &= -y\Re\{Z'(z)\}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Jako vhodnou holomorfní funkci, splňující okrajové podmínky, můžeme podle [1] použít

$$Z(z) = \frac{\sigma_{\infty}z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \tag{B.12}$$

kde symbolem  $\sigma_{\infty}$  značíme zatížení v dostatečné vzdálenosti od trhliny,  $a$  je polovina délky trhliny, jak ilustruje obrázek B.1. Z rovnic (B.11) vyplývá, že v rovině trhliny platí

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \Re\{Z\} = \frac{\sigma_{\infty}x}{\sqrt{x^2 - a^2}}. \tag{B.13}$$

Označme horizontální vzdálenost od kořene trhliny  $\tilde{x} = x - a$ , potom rovnice (B.13) při uvážení  $\tilde{x} \ll a$  přechází v

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_{\infty}\sqrt{a}}{\sqrt{2\tilde{x}}}$$

Srovnáme-li tuto rovnici s rovnicí (4.4), kterou zapíšeme

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\tilde{x}}},$$

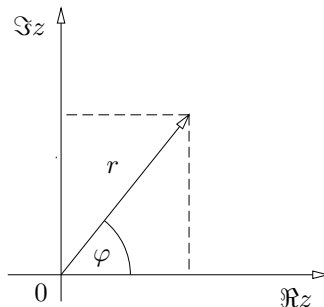
dostaneme známý vztah

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}. \quad (\text{B.14})$$

Po dosazení (B.14) do (B.12) máme

$$Z(\tilde{z}) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\tilde{z}}}, \quad (\text{B.15})$$

kde  $\tilde{z} = z - a$ . Za předpokladu  $r \gg a$ , Eulerova vztahu (C.5) a rovnice (B.15) plynou vztahy pro složky tenzoru napětí (4.3), viz [1].



Obrázek C.1: Gaussova rovina

## C. Funkce komplexní proměnné

### C.1. Komplexní čísla

Komplexním číslem nazýváme číslo ve tvaru, [7],

$$z = x + iy,$$

kde  $x, y$  jsou libovolná reálná čísla a  $i$  je tzv. *imaginární jednotka* s vlastností  $i^2 = -1$ . Reálné číslo  $x$  nazýváme reálnou částí komplexního čísla  $z$  a značíme je  $\Re\{z\}$ , reálné číslo  $y$  nazýváme imaginární částí komplexního čísla a značíme je  $\Im\{z\}$  tj.

$$z = \Re\{z\} + i\Im\{z\}.$$

Číslo komplexně sdružené k číslu  $z$  značíme  $\bar{z}$  a je definované vztahem

$$\bar{z} = \Re\{z\} - i\Im\{z\}.$$

Modulem, neboli absolutní hodnotou, komplexního čísla  $z$  nazýváme reálné číslo  $|z|$  definované vztahem, viz [19],

$$|z| = (\bar{z}z)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\Re^2\{z\} + \Im^2\{z\}}$$

Množinu všech komplexních čísel označujeme symbolem  $\mathbb{C}$ . Každé komplexní číslo  $z$  si můžeme zobrazit jako bod v tzv. *Gaussově rovině*, viz obrázek C.1. Je možné zavést také polární souřadný systém, kde polohu každého komplexního čísla pak určuje vzdálenost  $r$  bodu  $z$  od bodu 0. Z Pythagorovy věty je zřejmé, že  $r = |z|$ . Úhel  $\varphi$  nazýváme argumentem komplexního čísla a značíme  $\arg z$ . Argument čísla  $z$  není určen jednoznačně, neboť úhly lišící se o celistvý násobek čísla  $2\pi$  považujeme za totožné, [7]. Proto se definuje hlavní argument čísla  $\text{Arg}z$ . Je to argument čísla  $z$  ležící v intervalu  $(-\pi, \pi)$

$$\arg z = \text{Arg}z + 2m\pi,$$

kde  $m$  je celé číslo. Funkce  $\text{Arg}z$  je jednoznačná. Z obrázku C.1 je zřejmé, že platí

$$\Re\{z\} = |z| \cos \varphi, \quad \Im\{z\} = |z| \sin \varphi,$$

odtud lze komplexní číslo  $z$  lze psát v tzv. *Gaussově tvaru* [19]

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (\text{C.1})$$



## C.2. Funkce komplexní proměnné

Nechť  $M \subseteq \mathbb{C}$ ,  $N \subseteq \mathbb{C}$ . Zobrazení  $f$  množiny  $M$  na množinu  $N$  nazýváme funkcí komplexní proměnné [7], kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$f(z) = w = u(x, y) + iv(x, y),$$

kde  $u, v$  jsou reálné funkce dvou reálných proměnných pro které platí

$$u(x, y) = \Re\{f(z)\}, \quad v(x, y) = \Im\{f(z)\}$$

a nazýváme je reálnou a imaginární částí funkce  $f(z)$ . Definice funkce může vést k nejednoznačností. Zpravidla se s touto situací setkáváme u implicitně zadaných funkcí  $F(z, w) = 0$ , resp. u inverzních funkcí  $G(w) = z$ . Různá řešení  $w_k = f_k(z)$  se nazývají *větvemi funkce*  $w$  [19].

Důležitým pojmem je tzv. *holomorfnost* funkce komplexní proměnné. Funkce  $f(z)$  je holomorfní v bodě  $z_0 \in \mathbb{C}$ , když existuje takové okolí bodu  $\mathcal{O}(z_0)$  bodu  $z_0$ , že existuje derivace funkce  $f(z)$  v každém bodě  $z \in \mathbb{C}$ . Je-li funkce  $f(z)$  holomorfní v každém bodě množiny  $M \subseteq \mathbb{C}$ , pak řekneme, že je holomorfní na množině  $M$ . Funkce  $f(z)$  je holomorfní v bodě  $z_0 = x_0 + iy_0$  právě, tehdy když obě funkce  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  jsou diferenciovatelné v bodě  $[x_0, y_0]$  a platí pro ně tzv. *Cauchyho-Riemannovy podmínky*.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \\ \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Je-li funkce holomorfní v bodě  $z_0$ , pak platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} - i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \tag{C.3}$$

Reálnou funkci dvou reálných proměnných  $u(x, y)$  nazveme *harmonickou funkcí* na oblasti  $D$ , má-li  $u(x, y)$  spojitě parciální derivace prvního a druhého řádu na  $D$  a vyhovuje *Laplaceově diferenciální rovnici*

$$\Delta u = 0.$$

Užitím (C.3) pro funkci  $f'(z)$ , která je holomorfní pro každé  $z \in D$ , a věty o záměnnosti parciálních derivací, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

tj. je splněna Laplaceova diferenciální rovnice jak pro funkci  $u(x, y)$ , tak pro funkci  $v(x, y)$  pro každý bod  $[x, y] \in D$ . Platí tedy následující věta.

**Věta:** Je-li funkce  $f(z)$  holomorfní funkce na oblasti  $D \subseteq \mathbb{C}$ , pak  $u(x, y)$  a  $v(x, y)$  jsou harmonické funkce. Opačné tvrzení neplatí, viz [7].

### C.3. Eulerův vzorec

Vztah mezi trigonometrickými funkcemi a komplexní exponenciální funkcí je popsán tzv. *Eulerovým vzorcem*<sup>11</sup>

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (\text{C.4})$$

Eulerův vzorec s uvážením Gaussova tvaru komplexního čísla (C.1) nám umožňuje zapsat komplexní číslo v *exponenciálním tvaru*

$$z = re^{i\varphi}. \quad (\text{C.5})$$

---

<sup>11</sup>Fyzik Richard Feynman navzal tuto rovnici jednou z nejpozoruhodnějších, téměř udivujících rovnic v celé matematice [8].